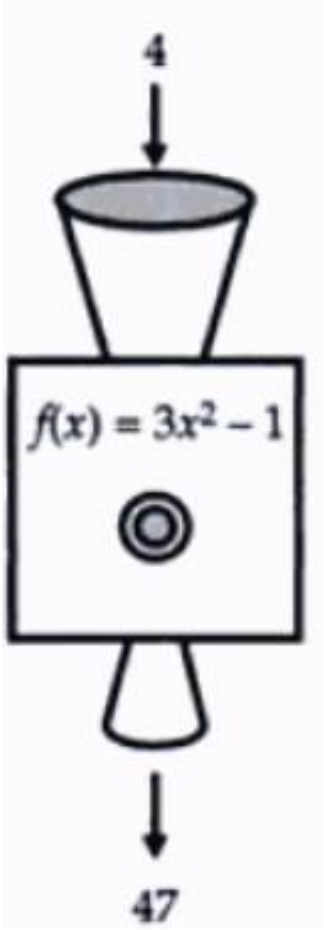
O conceito de *função* é central em matemática. Intuitivamente, uma função pode ser encarada como uma máquina. Introduz-se um número na máquina, aperta-se um botão e sai uma resposta. Uma propriedade-chave do fato de ser uma função é a consistência.



Definição 20.1 (Função)

Uma relação f é chamada *função* desde que $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ impliquem $b = c$.

Enunciada de forma negativa, uma relação f não é uma função se existem a, b, c com $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, e $b \neq c$.

Sejam

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 2), (1, 3), (4, 7)\}.$$

A relação f é uma função, mas a relação g não o é porque $(1, 2), (1, 3) \in g$ e $2 \neq 3$.

Exemplo 20.2

Sejam

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 2), (1, 3), (4, 7)\}.$$

A relação f é uma função, mas a relação g não o é porque $(1, 2), (1, 3) \in g$ e $2 \neq 3$.

Os matemáticos raramente utilizam a notação $(1, 2) \in f$, embora isto seja formalmente correto. Eles preferem a notação $f(.)$.

Linguagem matemática! Os matemáticos costumam usar a palavra *aplicação* como sinônimo de *função*. Alem de dizerem "f de 1 é igual a 2", dizem também "f aplica 1 em 2". E há uma notação para isto: escrevemos $1 \mapsto 2$. A seta especial $\mapsto$ significa $f(1) = 2$. A função f não é explicitamente mencionada na notação $1 \mapsto 2$; quando usamos a notação $\mapsto$, devemos ter certeza de que o leitor sabe que função está sendo discutida.

Para a função f do Exemplo 20.2, temos:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 7,$$

Exemplo 20.4

Problema: Expresse a função $f(x) = x^2$, definida no conjunto dos inteiros, como um conjunto de pares ordenados.

Solução: Poderíamos escrever isto utilizando reticências:

$$f = \{\ldots, (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\},$$

$$f = \{(x, y): x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}.$$

Em geral, é mais claro escrevermos "Seja f a função definida para um inteiro x por $f(x) = x^2$", do que escrevermos f como um conjunto de pares ordenados, como no exemplo.

Definição 20.5 (Domínio, Imagem)

Seja f uma função. O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de f é chamado *domínio de* f e se denota por dom f. O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de f se chama *imagem* de f e se denota por im f.

Em outra notação,

$$\text{dom } f = \{a : \exists b, (a, b) \in f\} \quad \text{e} \quad \text{im } f = \{b : \exists a, (a, b) \in f\}.$$

Alternativamente, podemos escrever

$$\text{dom } f = \{a : f(a) \text{ está definido}\} \quad \text{e} \quad \text{im } f = \{b : b = f(a) \text{ para algum } a\}.$$

Exemplo 20.6

Seja $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\}$. (Esta é a função do Exemplo 20.2.) Então,

$$\operatorname{dom} f = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{1, 2, 3, 7\}.$$

Exemplo 20.7

Seja f a função do Exemplo 20.4, isto é,

$$f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}.$$

O domínio de f é o conjunto de todos os inteiros e a imagem de f é o conjunto de todos os quadrados perfeitos.

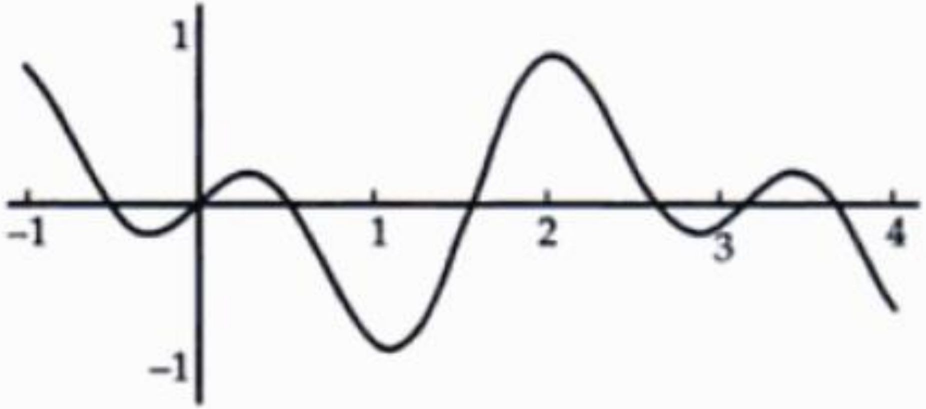
Definição 20.8 ($f: A \to B$)

Seja f uma função e sejam os conjuntos A e B. Dizemos que "f é uma função de A para B" se $\operatorname{dom} f = A$ e $\operatorname{im} f \subseteq B$. Em tal caso, escrevemos $f: A \to B$. Dizemos também que "f é uma *aplicação* de A em B".

A notação $f: A \to B$ se lê "f é uma função de A para B". A notação $f: A \to B$ sugere três coisas: primeiro, f é uma função; segundo, $\operatorname{dom} f = A$; terceiro, $\operatorname{im} f \subseteq B$.

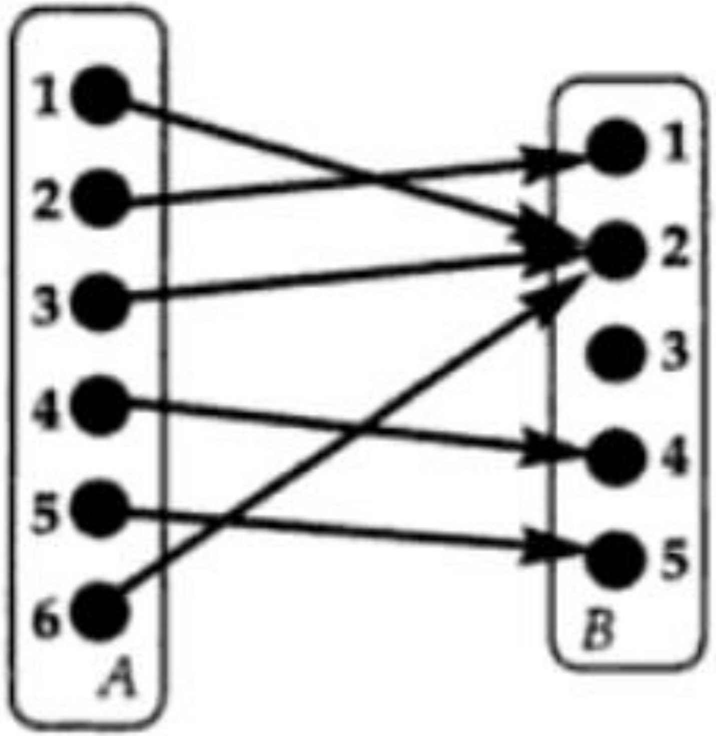
Gráficos de Funções

Os gráficos constituem uma forma excelente de visualizarmos funções cujas entradas e saídas são números reais. Por exemplo, a figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)=$ sen x cos $3x$. Para traçar o gráfico de uma função, marcamos um ponto no plano das coordenadas $(x, f(x))$ para todo $x \in$ dom f.



Temos uma forma alternativa para traçar gráficos de funções $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e consideremos a função $f : A \to B$ definida por

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 2)\}.$$



$$\operatorname{im} f = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Se f é uma função de A para B ($f : A \to B$), sua figura deve satisfazer o seguinte: todo ponto à esquerda (em A) tem exatamente uma seta partindo dele e terminando à direita (em B).

Contagem de Funções

Sejam A e B conjuntos finitos. Quantas funções há de A para B? Sem perda de generalidade, podemos escolher A como o conjunto $\{1, 2, ..., a\}$ e B como o conjunto $\{1, 2, ..., b\}$. Toda função $f : A \to B$ pode escrever-se como

$$f = \{(1, ?), (2, ?), (3, ?), ..., (a, ?)\}$$

onde os pontos de interrogação (?) são elementos de B.

De quantas maneiras podemos

substituir os pontos de interrogação (?s) com elementos de B?

Proposição 20.10

Sejam A e B conjuntos finitos com $|A| = a$ e $|B| = b$. O número de funções de A para B é b^a.

Exemplo 20.11

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Determine todas as funções $f : A \to B$.

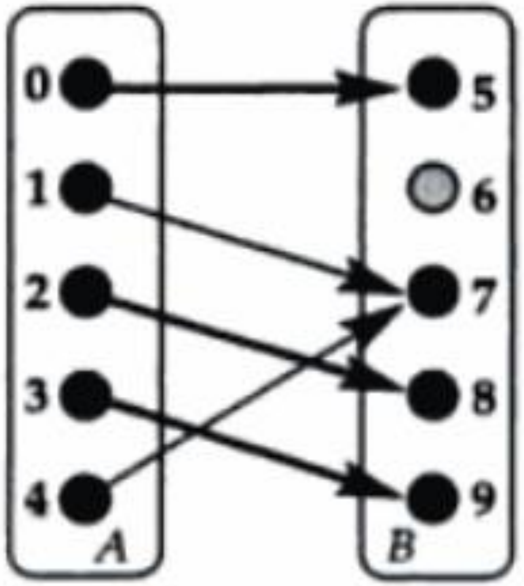
Solução: A Proposição 20.10 afirma que há $2^3 = 8$ dessas funções. São:

$$
\begin{array}{ll}
\{(1,4),(2,4),(3,4)\} & \{(1,5),(2,4),(3,4)\} \\
\{(1,4),(2,4),(3,5)\} & \{(1,5),(2,4),(3,5)\} \\
\{(1,4),(2,5),(3,4)\} & \{(1,5),(2,5),(3,4)\} \\
\{(1,4),(2,5),(3,5)\} & \{(1,5),(2,5),(3,5)\}
\end{array}
$$

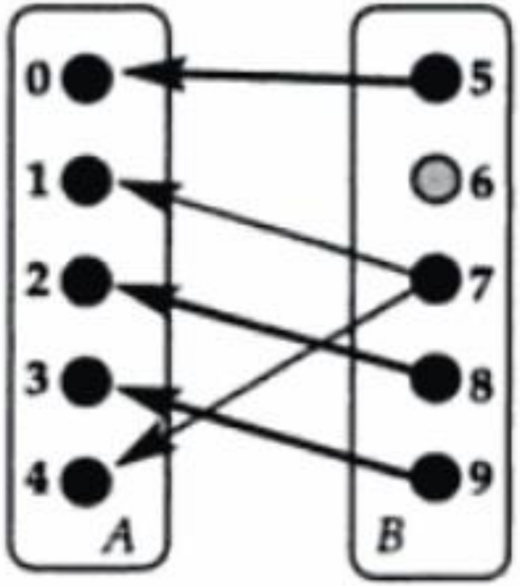
A notação B^A representa o conjunto de todas as funções $f : A \to B$.

Funções Inversas

Uma função é um tipo especial de relação. Recorde que, na Seção 11, definimos a inversa de uma relação R, denotada por R^{-1}, como a relação formada a partir de R mediante inversão de todos os seus pares ordenados.



relação R



R^{-1}

Exemplo 20.12

Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Seja $f : A \to B$ definida por

$$f = \{(0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7)\}$$

de forma que

$$f^{-1} = \{(5, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (7, 4)\}.$$

f^{-1} será uma função de B para A? A resposta é *não*, por duas razões. Primeira, f^{-1} não é uma função. Note que tanto $(7, 1)$ como $(7, 4)$ estão em f^{-1}; segunda, dom $f^{-1} = \{5, 7, 8, 9\}, \neq B$. Veja a figura.

Definição 20.13 (Um-a-Um)

Uma função f é chamada *um-a-um* se, sempre que $(x, b), (y, b) \in f$, devemos ter $x = y$. Em outras palavras, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.

Linguagem matemática! A expressão *um-a-um* costuma também ser escrita como 1:1. Outra designação para uma função um-a-um é *injeção* ou *função injetiva*.

A função do Exemplo 20.12 não é um-a-um porque $f(1) = f(4)$ mas $1 \neq 4$. Compare detalhadamente as Definições 20.13 (um-a-um) e 20.1 (função). As condições são bastante semelhantes.

Proposição 20.14

Seja f uma função. A relação inversa f^{-1} é uma função se e somente se f é um-a-um.

Deixamos a prova como exercício (Exercício 20.10). Enquanto trabalha nela, prove também o seguinte.

Proposição 20.15

Seja f uma função e suponhamos que f^{-1} também seja uma função. Então $\operatorname{dom} f = \operatorname{im} f^{-1}$ e $\operatorname{im} f = \operatorname{dom} f^{-1}$.

Exemplo 20.16

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x + 4$. Prove que f é um-a-um.

Prova: Suponhamos $f(x) = f(y)$. Então $3x + 4 = 3y + 4$. Subtraindo 4 de ambos os membros, vem $3x = 3y$. Dividindo ambos os membros por 3, obtemos $x = y$. Portanto, f é um-a-um. ☺

Em contrapartida, para provar que uma função não é um-a-um, devemos tipicamente apresentar um contra-exemplo, isto é, um par de objetos x e y com $x \neq y$ mas $f(x) = f(y)$.

Exemplo 20.17

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$. Prove que f não é um-a-um.

Prova. Note que $f(3) = f(-3) = 9$, mas $3 \neq -3$. Portanto, f não é um-a-um. ☺

Definição 20.18 (Sobre)

Seja $f : A \to B$. Dizemos que f é *sobre* B desde que, para todo $b \in B$, exista um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Em outras palavras, $\operatorname{im} f = B$.

A sentença "$f : A \to B$ é sobre" é uma garantia da validade do seguinte: primeiro, f é uma função; segundo, $\operatorname{dom} f = A$ e terceiro, $\operatorname{im} f = B$ (veja o Exercício 20.7).

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10\}$ e sejam

$$f = \{(1, 7), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 9), (6, 10)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 9), (5, 9), (6, 10)\}.$$

Note que $f : A \to B$ é sobre porque, para cada elemento b de B, podemos achar um ou mais elementos $a \in A$ tal que $f(a) = b$. É fácil ver também que $\operatorname{im} f = B$. Entretanto, $g : A \to B$ não é sobre. Note que $8 \in B$, mas não há $a \in A$ com $g(a) = 8$. Também, $\operatorname{im} g = \{7, 9, 10\} \neq B$.

A condição de $f : A \to B$ ser sobre se expressa com auxílio dos quantificadores $\exists$ e $\forall$ como

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

A condição de f não ser sobre se expressa como

$$\exists b \in B, \forall a \in A, f(a) \neq b.$$

Exemplo 20.20

Seja $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3x + 4$. Prove que f é sobre $\mathbb{Q}$.

Prova. Seja $b \in \mathbb{Q}$ arbitrário. Procuramos um $a \in \mathbb{Q}$ tal que $f(a) = b$. Seja $a = \frac{1}{3}(b - 4)$. (Como b é um número racional, também o é a.) Note que

$$f(a) = 3\left[\tfrac{1}{3}(b-4)\right] + 4 = (b-4) + 4 = b.$$

Portanto, $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ é sobre. ☺
Como conseguimos "adivinhar" que deveríamos tomar $a = \frac{1}{3}(b - 4)$? Na realidade, não supusemos. Trabalhamos em sentido contrário!

Teorema 20.21

Sejam os conjuntos A e B e $f : A \to B$. A relação inversa f^{-1} é uma função de B para A se e somente se f é um-a-um e sobre B.

Definição 20.22 (Bijeção)

Seja $f : A \to B$. f é chamada uma *bijeção* se é ao mesmo tempo um-a-um e sobre.

Exemplo 20.23

Sejam A o conjunto dos inteiros pares e B o conjunto dos inteiros ímpares. A função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$ é uma bijeção.

Prova. Devemos provar que f é um-a-um e sobre. Para vermos que f é um-a-um, suponhamos $f(x) = f(y)$, onde x e y são inteiros pares. Assim,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y.$$

Logo, f é um-a-um.

Para vermos que f é sobre B, seja $b \in B$ (isto é, b é um inteiro ímpar). Por definição, $b = 2k + 1$, para algum inteiro k. Seja $a = 2k$; obviamente, a é par. Então $f(a) = a + 1 = 2k + 1 = b$, de forma que f é sobre. Como f é um-a-um e sobre, f é uma bijeção. ☺

Proposição 20.24 (Princípio da Casa do Pombo)

Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \to B$. Se $|A| > |B|$, então f não é um-a-um. Se $|A| < |B|$, então f não é sobre.

Reformulada na forma contra-positiva, se $f : A \to B$ é um-a-um, então $|A| \leq |B|$, e se $f : A \to B$ é sobre, então $|A| \geq |B|$. Se f é ambas as coisas, temos o seguinte.

Proposição 20.25

Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \to B$. Se f é uma bijeção, então $|A| = |B|$.