

## LISTA DE EXERCÍCIOS

Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , determine se a relação é reflexiva, anti-reflexiva, anti-simétrica e/ou transitiva.

- a)  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ .
- b)  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ .
- c)  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ .
- d)  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ .
- e)  $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

(1)

Trace ilustrações das seguintes relações:

- a) Seja  $A = \{a \in \mathbb{N} : a \mid 10\}$  e seja  $R$  a relação  $\mid$  (divide) restrita a  $A$ .
- b) Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e seja  $R$  a relação *menor do que* restrita a  $A$ .
- c) Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e seja  $R$  a relação  $=$  (igual) restrita a  $A$ .
- d) Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e seja  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ . Consideremos a relação  $\geq$  (maior do que ou igual a) de  $A$  para  $B$ .
- e) Seja  $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e seja  $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B, a \mid b\}$ .

(2)

Digamos que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por  $R$  esta relação *estar próximo de*.

- a) Escreva  $R$  como um conjunto de pares ordenados. Sua resposta deve apresentar-se como segue:

$$R = \{(x, y) : \dots\}$$

Prove ou refute:

- b)  $R$  é reflexiva.
- c)  $R$  é anti-reflexiva.
- d)  $R$  é simétrica.
- e)  $R$  é anti-simétrica.
- f)  $R$  é transitiva.

(3)

14. Seja  $A$  um conjunto de pessoas. Definem-se em  $A$  as relações binárias:

- $aRb$  se e somente se  $b$  "é pai de"  $a$ .
- $aSb$  se e somente se  $b$  "é irmão de"  $a$ .
- $aTb$  se e somente se  $b$  "é marido de"  $a$ .

Qual o grau de parentesco entre  $a$  e  $b$  se:

- (a)  $a(R \circ S)b$
- (b)  $a(T \circ R)b$
- (c)  $a(T \circ S)b$
- (d)  $a(S \circ R)b$
- (e)  $a(R \circ T)b$

11. Dê um exemplo de uma relação que seja simétrica e transitiva, mas não reflexiva.

Explique o que está errado na seguinte "prova".

**Afirmção:** Se  $R$  é simétrica e transitiva, então  $R$  é reflexiva.  
**"Prova":** Suponhamos que  $R$  seja simétrica e transitiva. Simétrica quer dizer que  $x R y$  implica  $y R x$ . Aplicamos a transitividade a  $x R y$  e a  $y R x$ , obtendo  $x R x$ . Portanto,  $R$  é reflexiva. 😊

(4)

14) Sejam  $R$  e  $S$  relações em um conjunto  $A$ , relações não-vazias. Assumindo que  $A$  tem pelo menos 3 elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contra-exemplo no conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ .

- a)  $R$  e  $S$  são simétricas então  $R \cap S$  é simétrica.
- b)  $R$  e  $S$  são simétricas então  $R \cup S$  é simétrica.
- c)  $R$  e  $S$  são reflexivas então  $R \cup S$  é reflexiva.
- d)  $R$  e  $S$  são reflexivas então  $R \cap S$  é reflexiva.
- e)  $R$  e  $S$  são transitivas então  $R \cup S$  é transitiva.
- f)  $R$  e  $S$  são antisimétricas então  $R \cup S$  é antisimétrica.
- g)  $R$  é antisimétrica então  $R^{-1}$  é antisimétrica.
- h)  $R$  é reflexiva então  $R \cap R^{-1}$  é não-vazia.

(5)