Inequações

DEFINIÇÃO Inequação linear em x

Uma **inequação linear em x** pode ser escrita na forma

$$ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0 \text{ ou } ax + b \geq 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Propriedades das inequações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas e c um número real.

1. Transitiva Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$.

2. Adição Se $u < v$, então $u + w < v + w$.
Se $u < v$ e $w < z$ então $u + w < v + z$.

3. Multiplicação Se $u < v$ e $c > 0$ então $uc < vc$.
Se $u < v$ e $c < 0$ então $uc > vc$.

As propriedades acima são verdadeiras se o símbolo $<$ é substituído por $\leq$. Existem propriedades similares para $>$ e $\geq$.

Resolva $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

SOLUÇÃO

$3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$	
$3x - 3 + 2 \leq 5x + 6$	Propriedade distributiva
$3x - 1 \leq 5x + 6$	Simplificação
$3x \leq 5x + 7$	Adição de 1
$-2x \leq 7$	Subtração de $5x$
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) \geq \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 7$	Multiplicação por $-1/2$ (desigualdade inverte)
$x \geq -3{,}5$	

o conjunto solução é $[-3{,}5, +\infty[$

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

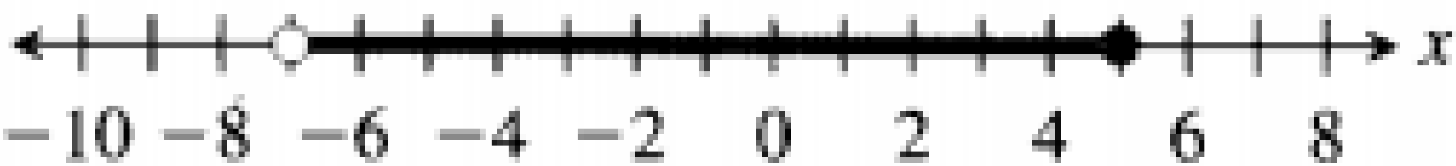
SOLUÇÃO

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15 \qquad \text{Multiplicação por 3}$$

$$-14 < 2x \leq 10 \qquad \text{Subtração por 5}$$

$$-7 < x \leq 5 \qquad \text{Divisão por 2}$$



Solução de inequações com valor absoluto

Solução de inequações com valor absoluto

Seja u uma expressão algébrica em x e a um número real com $a \geq 0$.

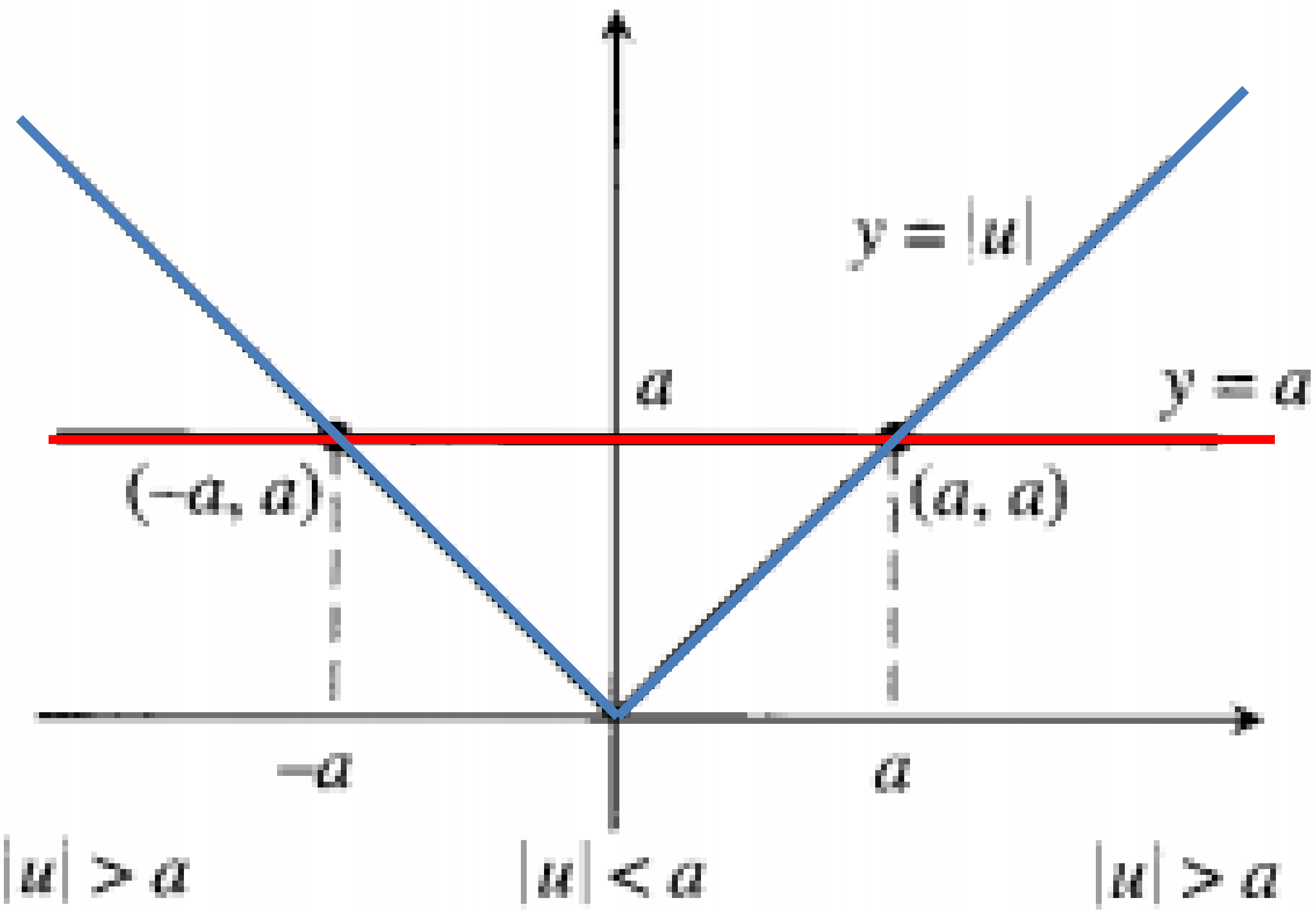
1. Se $|u| < a$, então u está no intervalo $]-a, a[$, isto é,

$$\boxed{|u| < a \quad \text{se e somente se} \quad -a < u < a.}$$

2. Se $|u| > a$, então u está no intervalo $]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$, isto é,

$$\boxed{|u| > a \quad \text{se e somente se} \quad u < -a \ \text{ ou } \ u > a.}$$

As desigualdades $<$ e $>$ podem ser substituídas por $\leq$ e $\geq$, respectivamente.



Gráficos de $y = a$ e $y = |u|$

Resolva $|x - 4| < 8$

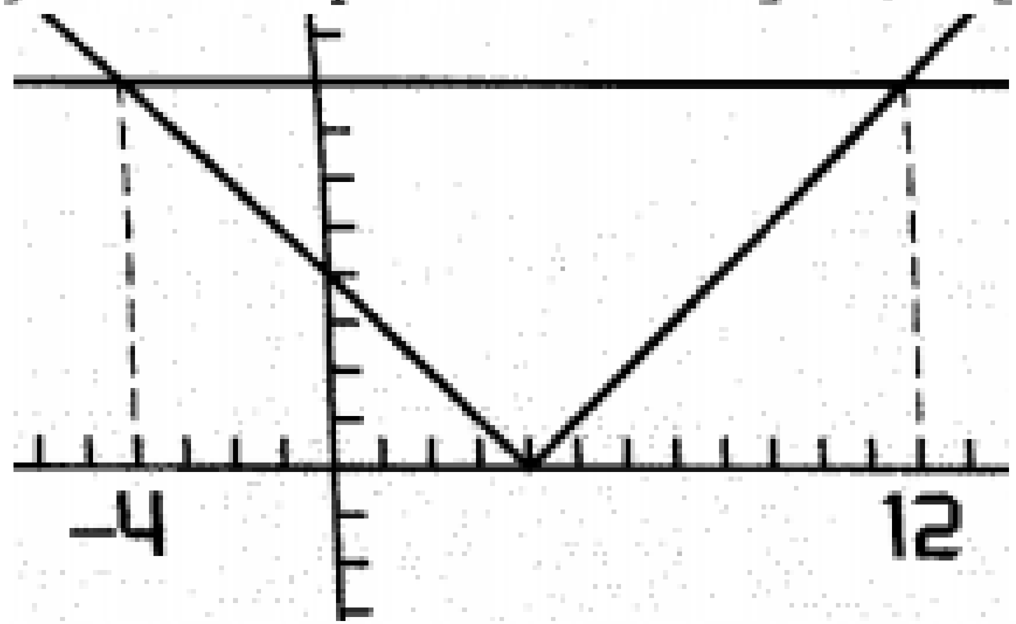
SOLUÇÃO

$$|x - 4| < 8$$

$$-8 < x - 4 < 8 \qquad \text{Inequação dupla equivalente}$$

$$-4 < x < 12 \qquad \text{Adição de 4}$$

A solução é dada pelo intervalo $]-4, 12[$



Os gráficos de $y = |x - 4|$ e $y = 8$

Resolva $|3x - 2| \geq 5$

SOLUÇÃO

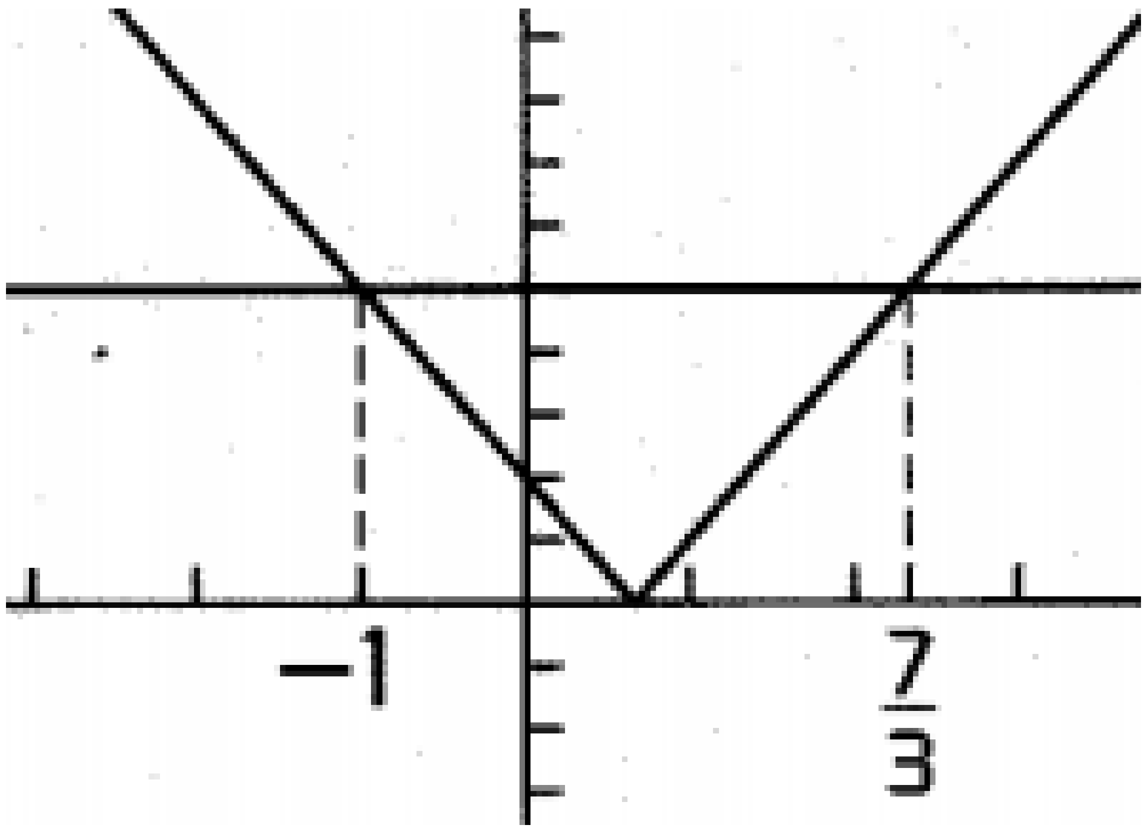
$$3x - 2 \leq -5 \quad \text{ou} \quad 3x - 2 \geq 5$$

$$3x \leq -3 \quad \text{ou} \quad 3x \geq 7 \qquad \text{Adição de 2}$$

$$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{7}{3} \qquad \text{Divisão por}$$

$$]-\infty, -1] \cup [7/3, +\infty[$$

Gráficos de $y = |3x - 2|$ e $y = 5$.



$[-4, 4]$ por $[-4, 10]$

Solução de inequações quadráticas

Resolva $x^2 - x - 12 > 0$

SOLUÇÃO

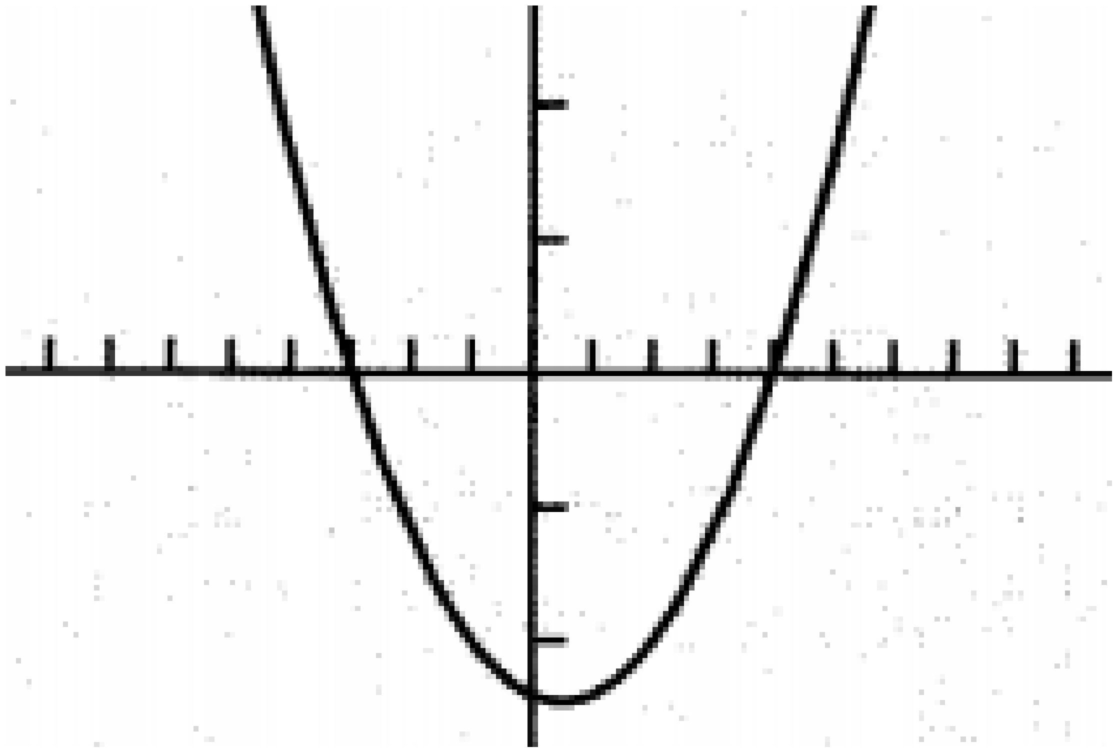
resolvemos a equação correspondente $x^2 - x - 12 = 0$.

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -3$$



O gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que cruza o eixo x em $x = -3$ e $x = 4$.

A solução da inequação original é $]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$

Resolva $2x^2 + 3x \leq 20.$

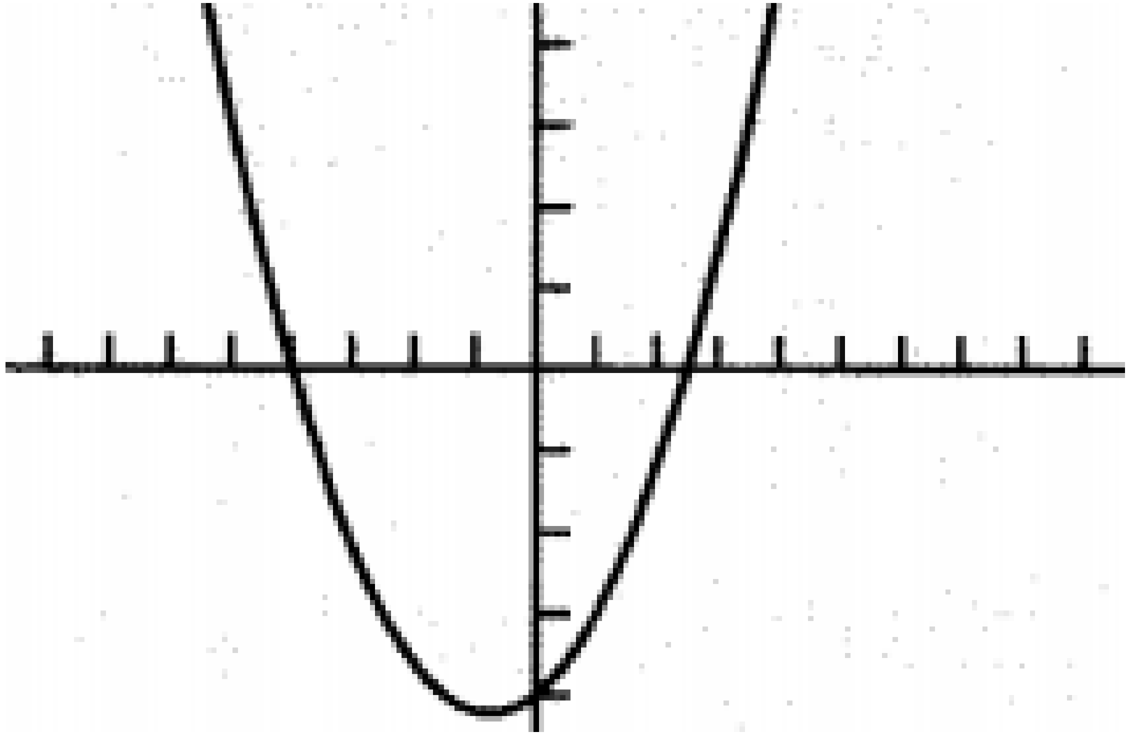
SOLUÇÃO

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$(x + 4)(2x - 5) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}$$

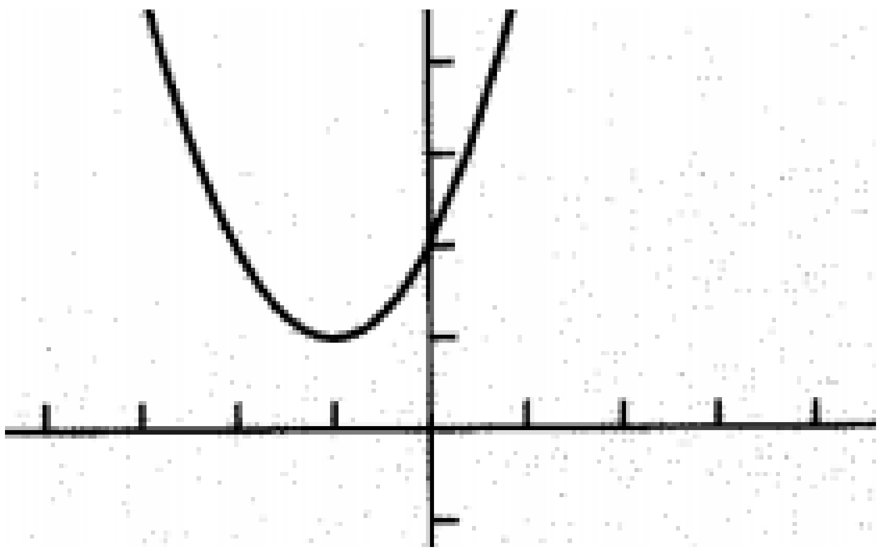


O gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$

A solução da inequação original é dada pelo intervalo $[-4;\ 2,5]$

Resolva $x^2 + 2x + 2 < 0$

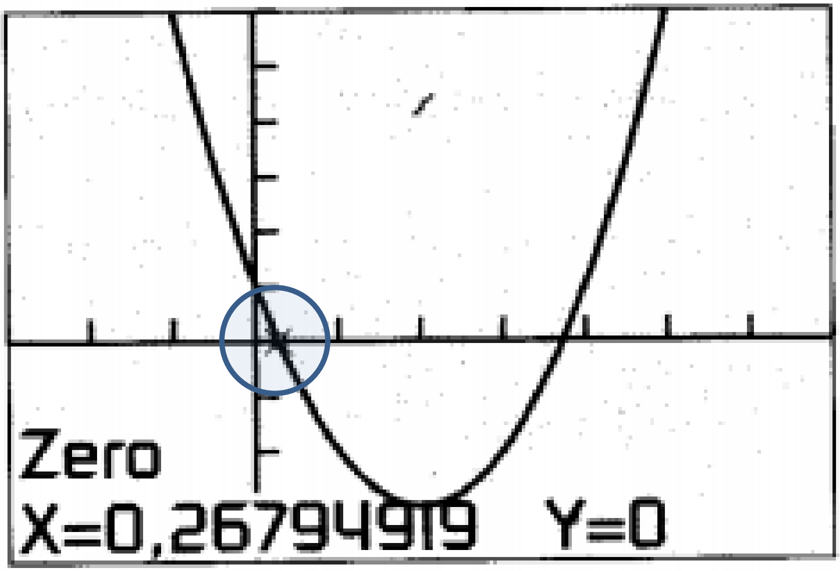
SOLUÇÃO

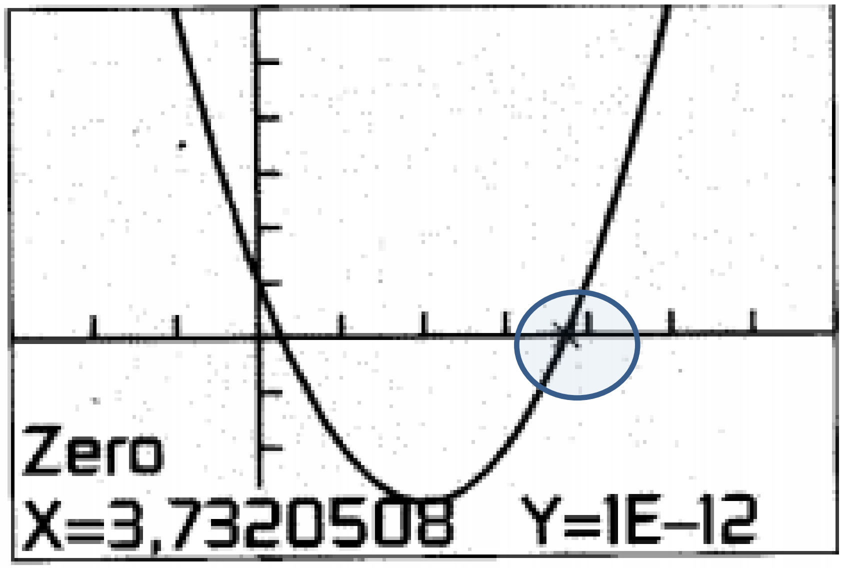


Os valores de $y = x^2 + 2x + 2$ não são negativos

Assim, a inequação $x^2 + 2x + 2 < 0$ *não* tem solução.

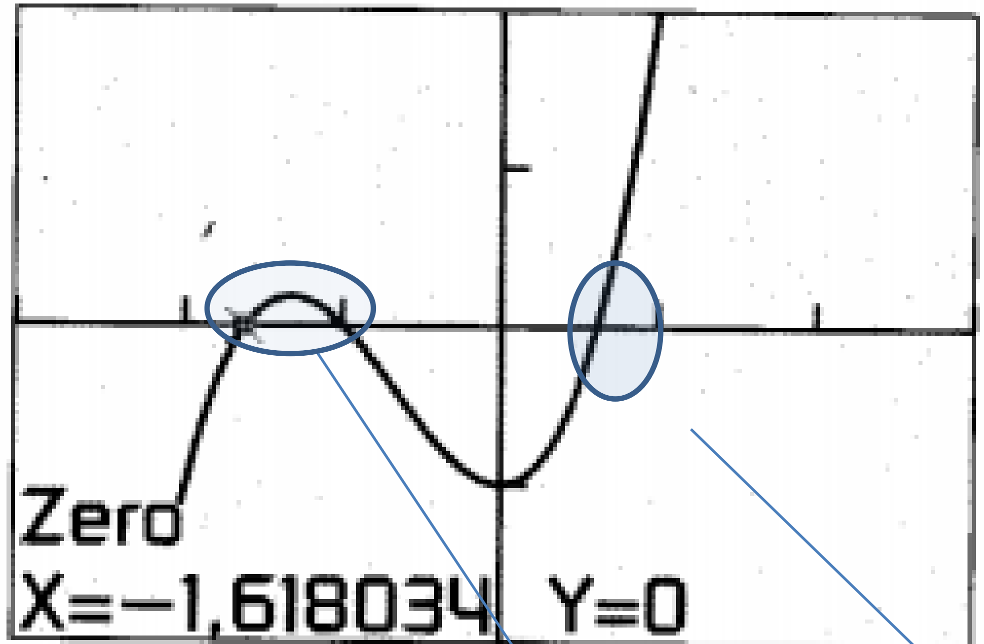
Resolva $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ graficamente





$$]-\infty; 0{,}27] \cup [3{,}73; +\infty[$$

Resolva $x^3 + 2x^2 - 1 \geq 0$ graficamente



O gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$

A solução da inequação é $[-1{,}62; -1] \cup [0{,}62; +\infty[$