Definição 22.1 (Composição de Funções)

Sejam os conjuntos A, B e C e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Então, a função $g \circ f$ é uma função de A para C definida por

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)]$$

onde $a \in A$. A função $g \circ f$ é chamada composição de g e f.

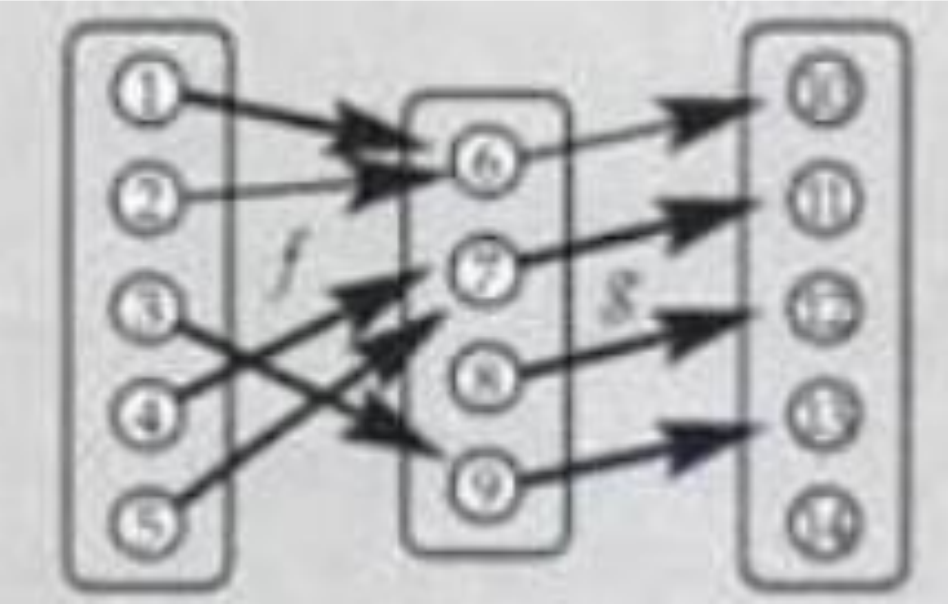
Exemplo 22.2

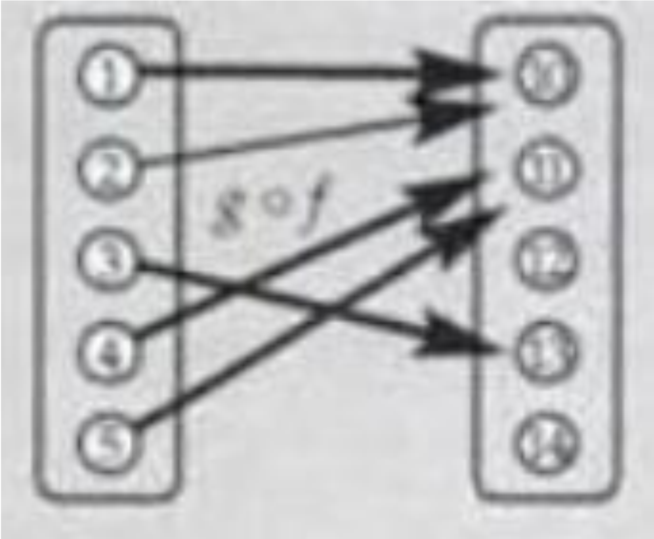
Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$ e $C = \{10, 11, 12, 13, 14\}$. Sejam $f: A \to B$ e $g : B \to C$ definidas por

$$f = \{(1, 6), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 7)\} \text{ e}$$
$$g = \{(6, 10), (7, 11), (8, 12), (9, 13)\}.$$

Então, $g \circ f$ é a função

$$(g \circ f) = \{(1, 10), (2, 10), (3, 13)\ (4, 11), (5, 11)\}.$$


1
2
3
4
5
f
6
7
8
9
g
10
11
12
13
14


1
2
3
4
5
g ∘ f
10
11
12
13
14

Exemplo 22.3

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 2x - 3$. Quanto é $(g \circ f)(4)$?

Calculamos $(g \circ f)(4) = g[f(4)] = g(4^2 + 1) = g(17) = 2 \times 17 - 3 = 31$.
De modo geral,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x^2 + 1) \\ &= 2(x^2 + 1) - 3 \\ &= 2x^2 + 2 - 3 \\ &= 2x^2 - 1.\end{aligned}$$

Alguns comentários:

- A notação $g \circ f$ significa que primeiro aplicamos f e, em seguida, g. Pode parecer estranho que, embora calculemos f primeiro, escrevamos seu símbolo depois. Por quê? Quando aplicamos a função $(g \circ f)$ a um elemento a, como em

$$(g \circ f)(a)$$

a letra f está mais próxima de a e "atinge" a primeiro:

$$(g \circ f)(a) \to (g\,[f(a)].$$

- O domínio de $g \circ f$ é o mesmo que o de f:

$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}\, f.$$

- Para que $g \circ f$ tenha sentido, toda saída de f deve ser uma entrada aceitável para g. Propriamente dito, devemos ter $\mathrm{im}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$. As exigências $f : A \to B$ e $g : B \to C$ asseguram que as funções se adaptam quando formamos $g \circ f$.
  Para as funções do Exemplo 22.2, $f \circ g$ não é definida porque $g(6) = 10$, mas $10 \notin \mathrm{dom}\, f$.
  É possível que $g \circ f$ e $f \circ g$ tenham ambas sentido (sejam definidas). Em tal situação, pode ocorrer que $f \circ g \neq g \circ f$ (sejam funções diferentes).

Exemplo 22.4 ($g \circ f \neq f \circ g$)

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sejam $f : A \to A$ e $g : A \to A$ definidas por

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

Então, $g \circ f$ e $f \circ g$ são:

$$g \circ f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\} \text{ e}$$
$$f \circ g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}.$$

Assim, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo 22.5

Recordemos as funções f e g do Exemplo 22.3: $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x - 3$. Para estas funções, temos

$$(g \circ f)(4) = g\,[f(4)] = g\,(17) = 31 \text{ e}$$
$$(f \circ g)(4) = f\,[g\,(4)] = f\,(5) = 26.$$

Portanto, $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.
Mais geralmente,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\,[f(x)] = g\,[x^2 + 1] \\ &= 2[x^2 + 1] - 3 = 2x^2 - 1 \qquad \text{e} \\ (f \circ g)(x) &= f\,[g(x)] = f\,[2x - 3] \\ &= [2x - 3]^2 + 1 \\ &= 4x^2 - 12x + 10.\end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposição 22.6

Sejam os conjuntos A, B, C e D e sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$. Então,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definição 22.7 (Função Identidade)

Seja A um conjunto. A *função identidade em* A é a função id_A, cujo domínio é A e para todo $a \in A$, $\mathrm{id}_A(a) = a$. Em outras palavras,

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}.$$

A razão por que chamamos id_A função identidade é a seguinte.

Proposição 22.9

Sejam os conjuntos A e B e suponhamos que $f : A \to B$ seja um-a-um e sobre. Então

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \text{ e } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$$