Exercícios (funções parte 2)

9. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{se } n \text{ se é par} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad \text{e}$$

Prove que f é uma bijeção.

10. Denote por E o conjunto dos inteiros pares. Ache uma bijeção entre E e $\mathbb{Z}$.

---

1. Listamos a seguir vários pares de funções f e g. Para cada par:
   - Determine qual das duas é definida – $g \circ f$ ou $f \circ g$.
   - Se uma ou ambas forem definidas, ache a(s) função(ões) resultante(s).
   - Se ambas forem definidas, determine se $g \circ f = f \circ g$ ou não.

   a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.
   b) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.
   c) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 5), (4, 3)\}$.
   d) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ e $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$.
   e) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ e
   $g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$.
   f) $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Z}$).
   g) $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 7$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Z}$).
   h) $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 2 - x$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Q}$).
   i) $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in \mathbb{Q}$ exceto $x = 0$ e $g(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
   j) $f = \mathrm{id}_A$ e $g = \mathrm{id}_B$ quando $A \subseteq B$ mas $A \neq B$.

9. Sejam os conjuntos A, B e C e $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove:
   a) Se f e g são um-a-um, também o é $g \circ f$.
   b) Se f e g são sobre, $g \circ f$ também é sobre.
   c) Se f e g são bijeções, também o é $g \circ f$.

10. Determine um par de funções f e g, do conjunto A para si mesmo, tal que $f \circ g = g \circ f$.
    Qualquer um dos casos a seguir serve:
    - Escolha f e g como a mesma função.
    - Escolha f ou g como id_A.
    - Escolha $g = f^{-1}$.

    Estes são muito fáceis. Ache outro exemplo.