Espaço Euclidiano n-dimensional

Se n é um inteiro positivo, dizemos que uma seqüência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reais é uma ***n–upla ordenada***. O conjunto de todas as n–uplas ordenadas é chamado o ***espaço n–dimensional*** e denotado por R^n.

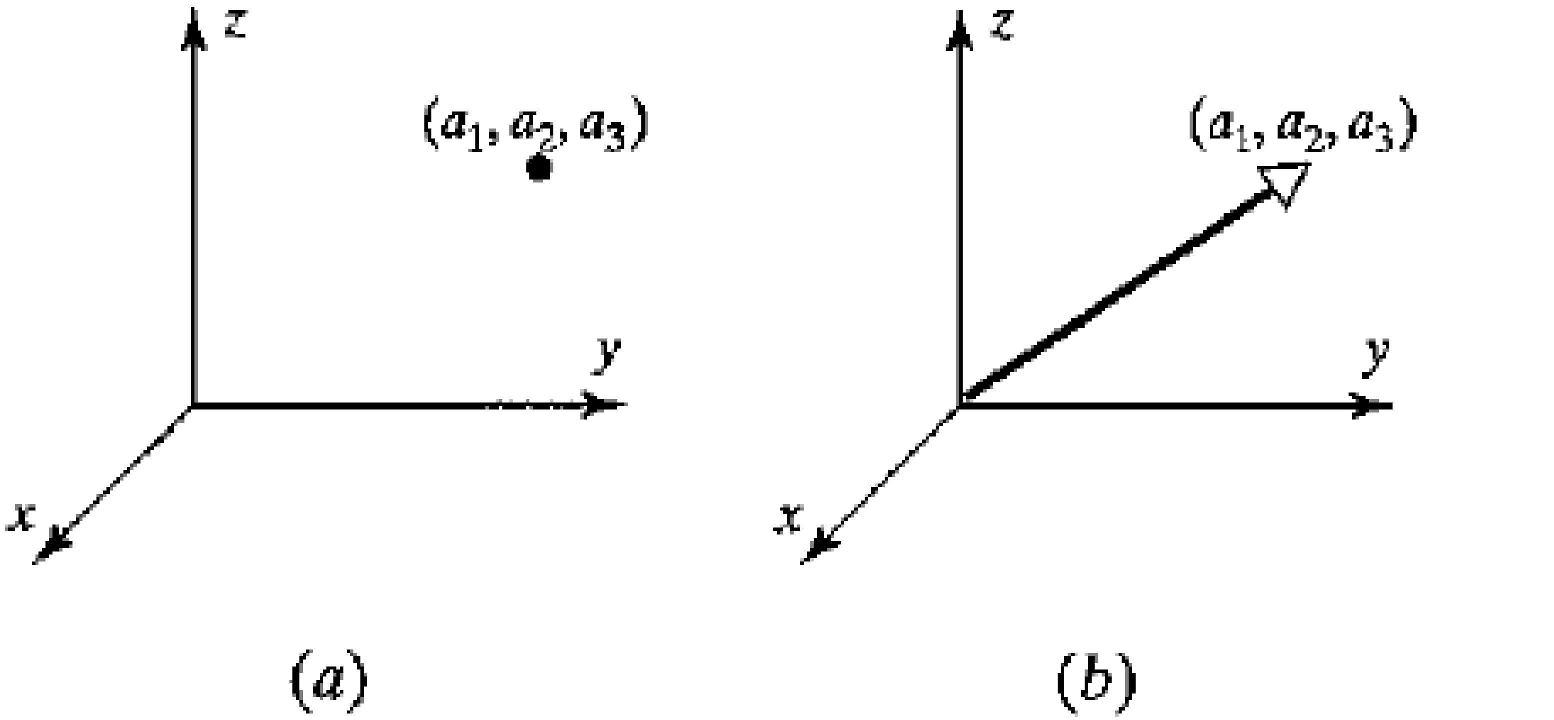


Figura 4.1.1 O terno ordenado (a_1, a_2, a_3) pode ser interpretado geometricamente como um ponto ou um vetor.

OBS.: Adição e subtração de vetores de modo usual

Teorema 4.1.1 **Propriedades de Vetores em R^n**

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *são vetores em* R^n *e* k *e* l *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, *ou seja*, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*e*) $k(l\mathbf{u}) = kl(\mathbf{u})$

(*f*) $l\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(*g*) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Produto interno euclidiano

EXEMPLO 1 Produto Interno de Vetores no R^4

O produto interno euclidiano dos vetores

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

em R^4 é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

Teorema 4.1.2 **Propriedades do Produto Interno Euclidiano**

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n *e* l *é um escalar, então:*

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(c) $(l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. *Além disto,* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = 0$.

EXEMPLO 2 Comprimento e Distância em R^4

O Teorema 4.1.2 nos permite efetuar contas com produtos internos euclidianos praticamente da mesma maneira que as efetuamos com produtos aritméticos comuns. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(3\mathbf{u}+2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (3\mathbf{u})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v})+(2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ &= (3\mathbf{u})\cdot(4\mathbf{u})+(3\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}+(2\mathbf{v})\cdot(4\mathbf{u})+(2\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\ &= 12(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})+3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+8(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})+2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= 12(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})+11(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\end{aligned}$$

Norma e Distância no Espaço Euclidiano n-dimensional Por analogia com as fórmulas familiares do R^2 e R^3, nós definimos a ***norma euclidiana*** (ou o ***comprimento euclidiano***) de um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em R^n por

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \qquad (1)$$

[Compare esta fórmula com as Fórmulas (1) e (2) da Seção 3.2.]

Da mesma forma, a ***distância euclidiana*** entre os pontos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ do R^n é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \qquad (2)$$

Teorema 4.1.3 A Desigualdade de Cauchy-Schwarz em R^n

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *são vetores em* R^n, *então:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \tag{3}$$

Nós omitimos a prova, pois adiante neste texto demonstraremos uma versão mais geral deste teorema. No entanto, para vetores do R^2 e R^3, este resultado é uma conseqüência simples da Fórmula (1) da Seção 3.3: Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-nulos do R^2 e R^3,

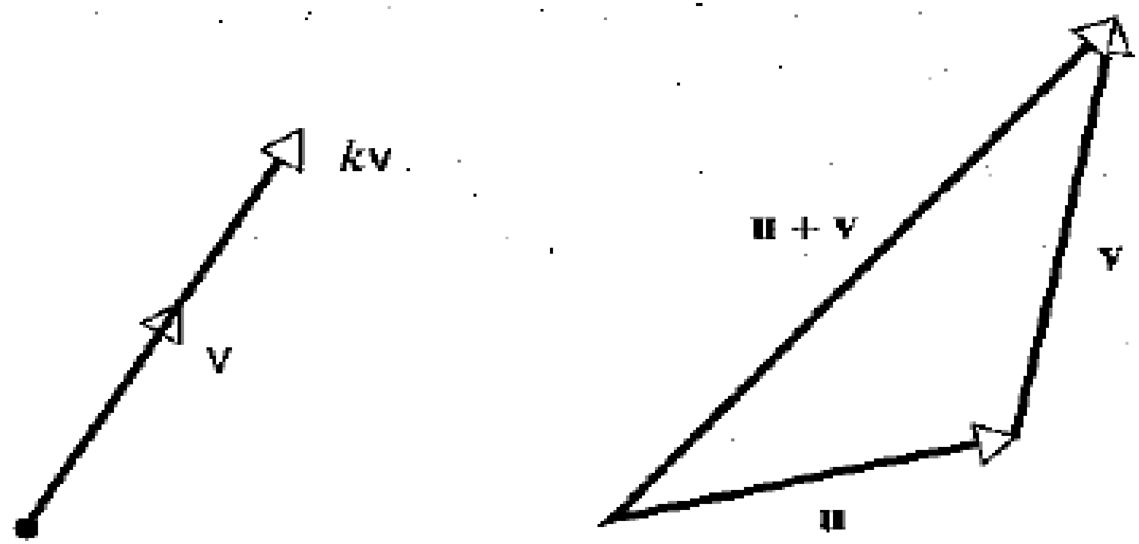
$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \big|\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta\big| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \tag{5}$$

e, se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então ambos os lados de (3) são zero, de modo que a desigualdade vale também neste caso.

Teorema 4.1.4 Propriedades do Comprimento em R^n

Se **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n *e* k *é um escalar, então:*

(*a*) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
(*b*) $\|\mathbf{u}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(*c*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$
(*d*) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdade triangular*)



(*a*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$ (*b*) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Teorema 4.1.5 Propriedades da Distância em R^n

Se **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n, *então:*

(*a*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$

(*b*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se*, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

(*c*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

(*d*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (*Desigualdade triangular*)

Definição

Dois vetores **u** e **v** em R^n são ***ortogonais*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

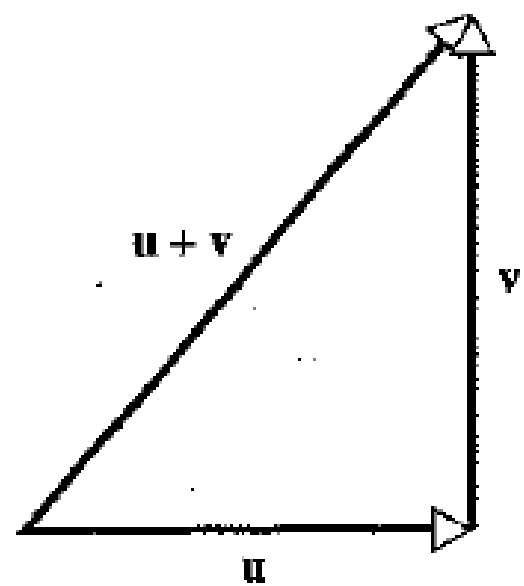
Teorema 4.1.6

Se $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são vetores em* R^n *com o produto interno euclidiano, então*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \tag{6}$$

As propriedades dos vetores ortogonais serão discutidas com mais detalhe mais adiante no texto, mas agora observamos que muitas das propriedades familiares de vetores ortogonais dos espaços euclidianos R^2 e R^3 continuam valendo no espaço euclidiano R^n. Por exemplo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais de R^2 ou de R^3, então $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ formam os lados de um triângulo retângulo (Figura 4.1.4); assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$



Teorema 4.1.7 O Teorema de Pitágoras em R^n

Se **u** *e* **v** *são vetores ortogonais em* R^n *com o produto interno euclidiano, então*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Notações Alternativas para Vetores em R^n

Muitas vezes é útil escrever um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de R^n em notação matricial como uma matriz-linha ou uma matriz-coluna:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \qquad k\mathbf{v} = k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

Uma Fórmula Matricial para o Produto Escalar

Se nós usarmos a notação de matrizes-coluna para os vetores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

e omitirmos o colchete de matrizes 1×1, então teremos

$$\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n] = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Assim, para vetores na notação de matrizes-coluna nós temos a seguinte fórmula para o produto interno euclidiano:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}} \tag{7}$$

EXEMPLO 6 Um Sistema Linear Escrito na Forma de Produto Escalar

Um exemplo de um sistema linear expresso no formato (11) de produto escalar é:

Sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Forma de Produto Escalar

$$\begin{bmatrix} (3, -4, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (2, -7, -4) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (1, 5, -8) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$