Lista de Exercícios sobre funções

1. Para cada uma das relações seguintes, responda:
   - É uma função? Se não for, explique por que e pare. Em caso contrário, continue com as questões restantes.
   - Quais são seus domínio e imagem?
   - A função é um-a-um? Se não for, explique por que e pare. Em caso contrário, responda à questão seguinte.
   - Qual é sua função inversa?

   a) $\{1, 2), (3, 4)\}$.
   b) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = 2x\}$.
   c) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 0\}$.
   d) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, xy = 0\}$.
   e) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}$.
   f) $\emptyset$.
   g) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 = 1\}$.
   h) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x \mid y\}$.
   i) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \mid y \text{ e } y \mid x\}$.
   j) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, \binom{x}{y} y = 1\}$.

2. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f : A \to B$. Indique quais são um-a-um e quais são sobre B.

5. Determine $f(2)$ para cada uma das funções seguintes.
   a) $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 0\}$.
   b) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.
   c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(x) = (x + 1)^{(x+1)}$.
   d) $f = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1\}$.

9. Para cada caso a seguir, determine se a função é um-a-um, sobre, ou ambos. Prove suas afirmações.
   a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x$.
   b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
   c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
   d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x-1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

   e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2$.

11. Sejam A e B conjuntos finitos e $f : A \to B$. Prove que duas quaisquer das afirmações seguintes acarretam a terceira.
    a) f é um-a-um.
    b) f é sobre.
    c) $|A| = |B|$.

12. Dê um exemplo de um conjunto A e uma função $f : A \to A$ onde f é sobre, mas não um-a-um. Dê um exemplo em que f é um-a-um, mas não sobre. Seus exemplos contradizem o exercício anterior?

13. Suponha que $f : A \to B$ seja uma bijeção. Prove que $f^{-1} : B \to A$ também é uma bijeção.