EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

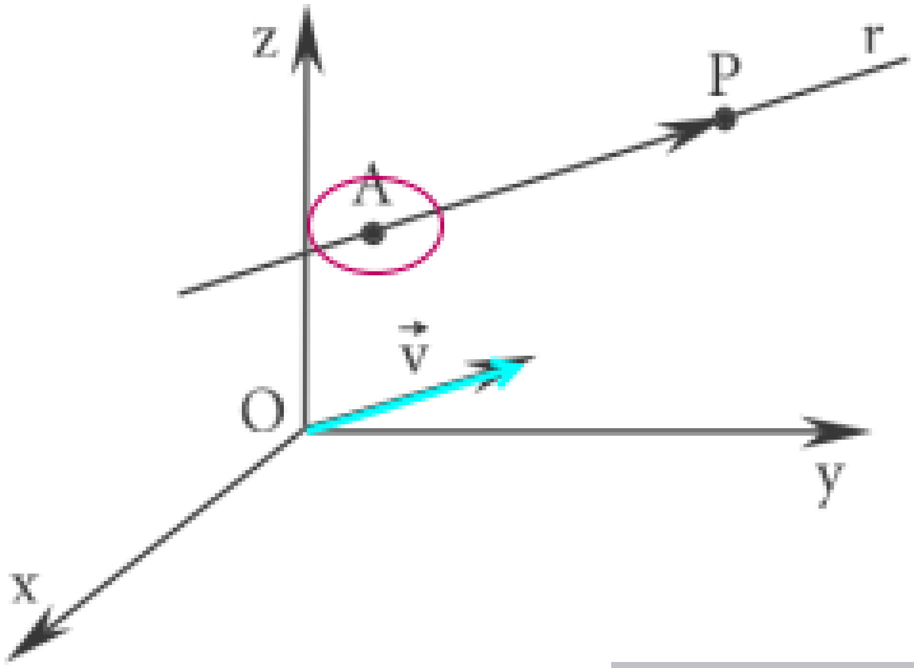


Figura 5.1

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \quad \textbf{(1)}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v} \quad \textbf{(2)}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \quad \textbf{(3)}$$

Qualquer uma das equações **(1)**, **(2)** ou **(3)** é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

1. Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos $A(2, -3, 4)$ e $B(1, -1, 2)$ e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e $D(-1, 3, 4)$ pertencem a r.

2. Dada a reta $r:(x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0)$, escrever equações paramétricas de r.

3. Escrever equações paramétricas da reta que passa por $A(1, 2, 3)$ e é paralela à reta

$$r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1)$$

Exemplo

$$r:(x,y,z)=(1,-1,4)+t(2,3,2)$$

$$P = A + t\vec{v}$$

tem-se

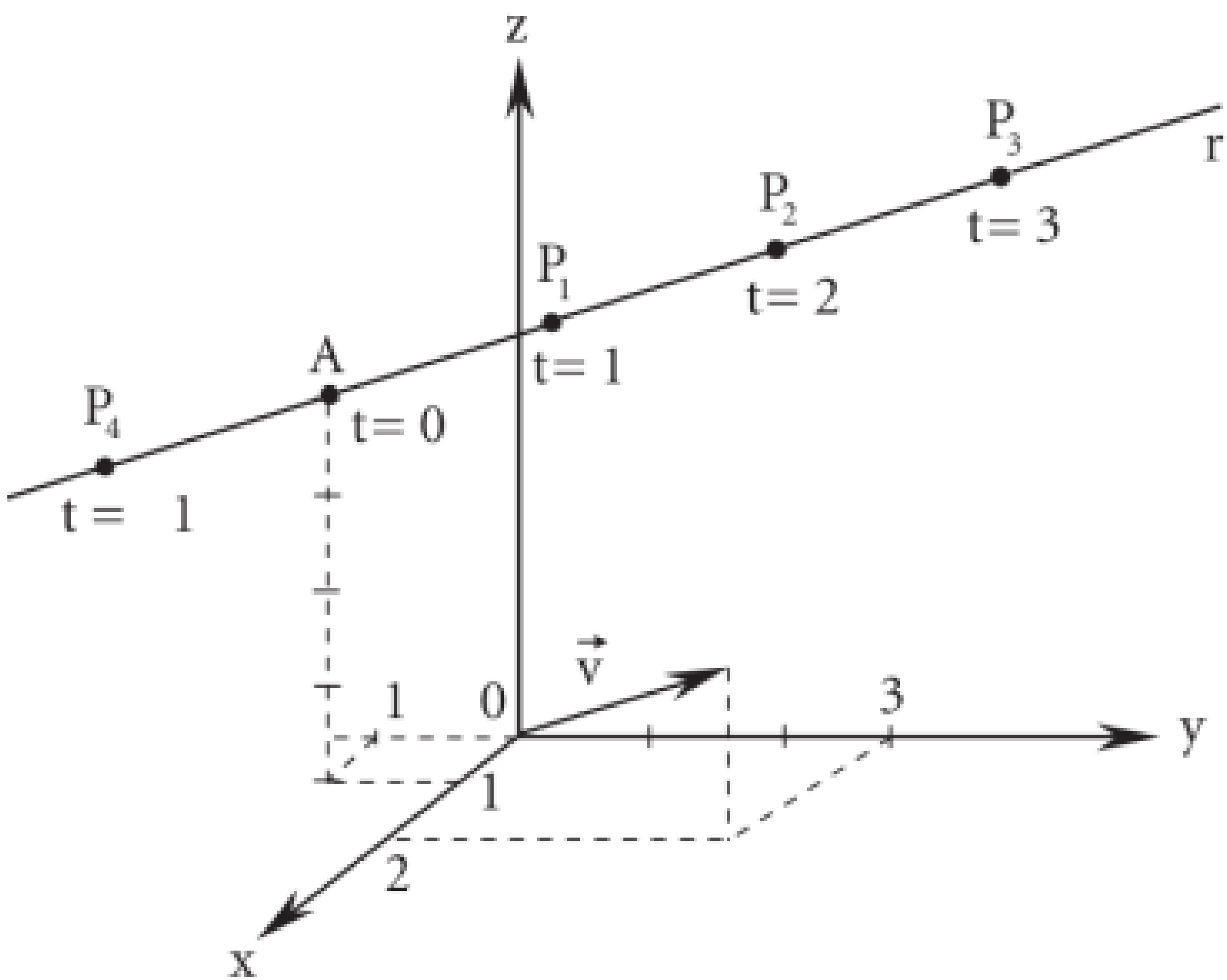
$$P_1 = A + (1)\vec{v}$$

$$P_2 = A + (2)\vec{v}$$

$$P_3 = A + (3)\vec{v}$$

$$P_4 = A + (-1)\vec{v}$$

$$A = A + (0)\vec{v}$$



A equação (4) não é a única equação vetorial de r. Por exemplo, a equação

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(4, 6, 4)$$

se utilizou o vetor $2\vec{v} = (4,6,4)$ como vetor diretor, em vez de $\vec{v} = (2,3,2)$.

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Da equação vetorial da reta

$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(a,b,c)$$

$$(x,y,z)=(x_1+at,y_1+bt,z_1+ct),$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

equações paramétricas da reta.

4. Dada a reta

$$r:\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6;

b) a abscissa seja igual à ordenada;

c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

5. A reta r passa pelo ponto A(4,−3,−2) e é paralela à reta

$$s:\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

6. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 1, 0)$

c) $A(1, 2, 3)$ e $B(1, 3, 2)$

6. a) $x = 1 + t$ $\quad y = -1 + 2t$ $\quad z = 2 - 2t$

c) $x = 1$ $\quad y = 2 + t$ $\quad z = 3 - t$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE UM SEGMENTO DE RETA

Figura 5.3

$$r:\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

Observemos que

para $t = 0$, obtém-se o ponto A;

para $t = 1$, obtém-se o ponto B;

e para t entre 0 e 1, obtém-se os pontos entre A e B.

$$AB:\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

as equações vetoriais dos segmentos AB e BA com $0 \leq t \leq 1$ são

$$P = A + t(B - A) \quad \text{e} \quad P = B + t(A - B),$$

7. Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por

a) A e B

b) C e D

c) A e D

d) B e C

e) D e E

f) B e D

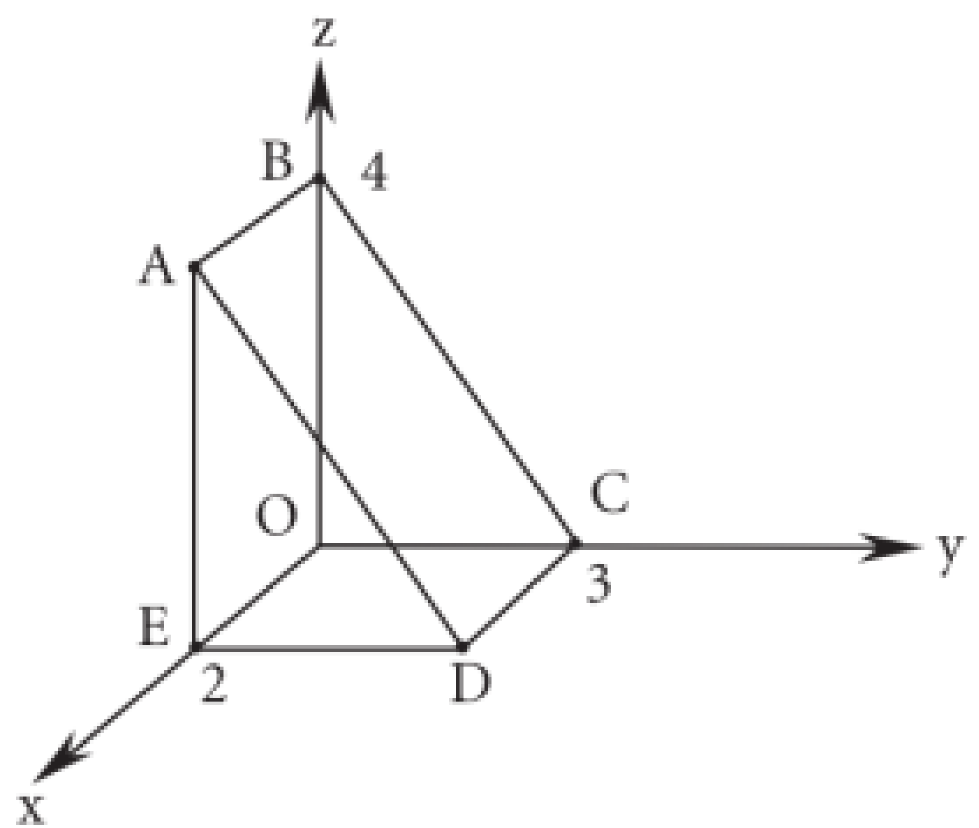


Figura 5.14

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

supondo $abc \neq 0$, vem

$$t = \frac{x - x_1}{a} \qquad t = \frac{y - y_1}{b} \qquad t = \frac{z - z_1}{c}$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

12. Verificar se os pontos $P_1(5,-5,6)$ e $P_2(4,-1,12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

13. Determinar o ponto da reta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;

b) ordenada 2.

14. Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r: \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z+4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

$A(2, -4, -3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -3)$

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3}$$

$$1(y+4) = 2(x-2) \qquad 1(z+3) = -3(x-2)$$

$$y+4 = 2x-4 \qquad z+3 = -3x+6$$

$$y = 2x-8 \qquad z = -3x+3$$

equações reduzidas da reta r, na variável x

RETAS PARALELAS AOS PLANOS COORDENADOS

reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz

se seus vetores diretores forem

paralelos ao correspondente plano

⬇

uma das componentes do vetor é nula.

r (r // xOy) que passa pelo ponto A(−1, 2, 4)

vetor diretor $\vec{v}=(2,3,0)$ (a 3ª componente é nula porque $\vec{v} \parallel xOy$).

Um sistema de equações paramétricas de r é

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+3t \\ z=4 \end{cases}$$

RETAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS

reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i}=(1,0,0)$ ou a $\vec{j}=(0,1,0)$ ou, ainda, a $\vec{k}=(0,0,1)$

duas das componentes do vetor são nulas

Seja a reta r que passa por A(2, 3, 4) e tem a direção do vetor $\vec{v}=(0,0,3)$.

A reta r pode ser representada
$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4+3t \end{cases}$$

ÂNGULO DE DUAS RETAS

ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

o ângulo entre as retas

$$r_1:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=-1-2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2:\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{v}_1.\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{\left|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}$$

$$=\frac{\left|-2+1-2\right|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}}=\frac{\left|-3\right|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\arccos(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}\text{rad}=60^\circ$$

RETAS ORTOGONAIS

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$,
Então,

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Observação

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 5.10, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Nesse caso, diz-se que são *perpendiculares.*

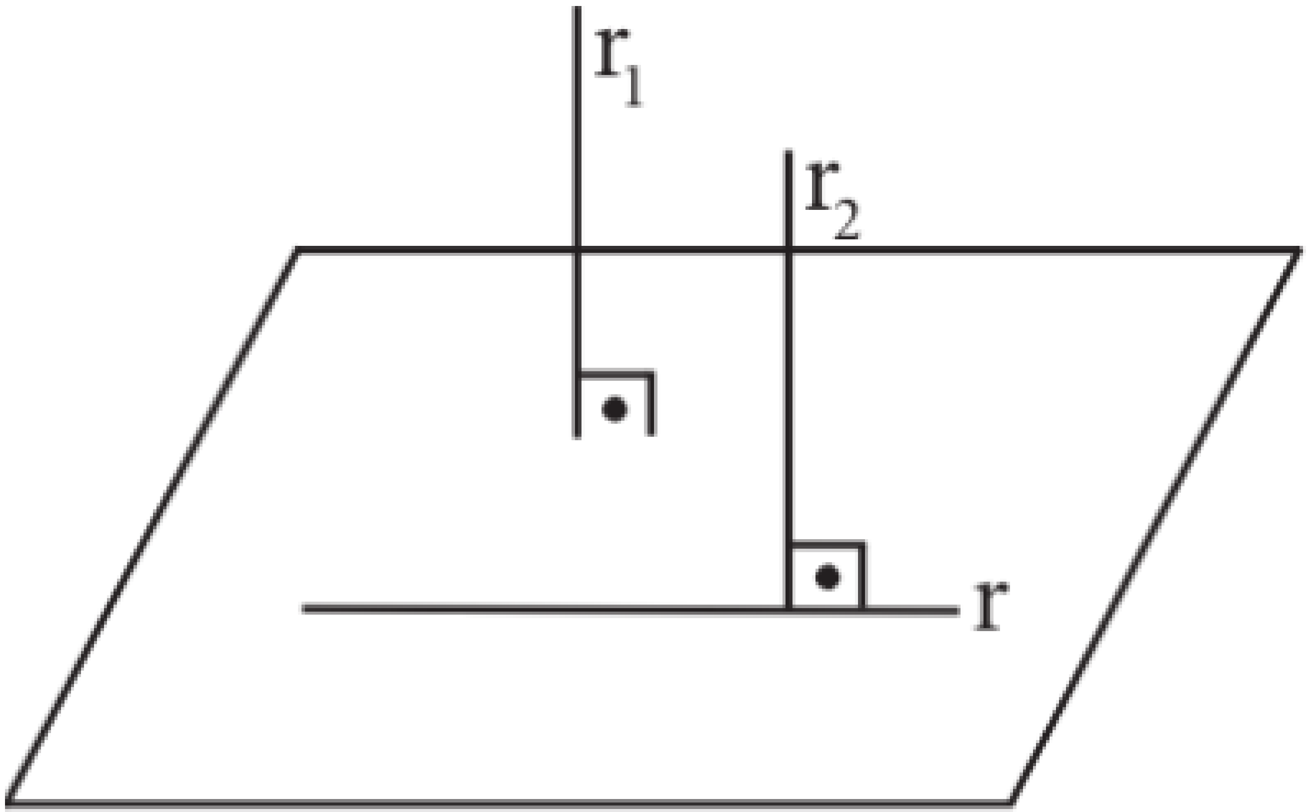


Figura 5.10

perpendiculares ⟹ concorrentes

RETA ORTOGONAL A DUAS RETAS

as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

r ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{v} \neq \vec{0}$$

Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A(3, 4, −1) e é ortogonal às retas

$$r_1:(x,y,z)=(0,0,1)+t(2,3,-4) \quad \text{e} \quad r_2:\begin{cases} x=5 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v}_1=(2,3,-4)$ e $\vec{v}_2=(0,1,-1)$

a reta r tem a direção do vetor

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,2,2)$$

$$r:\begin{cases} x=3+t \\ y=4+2t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Se duas retas, como no exemplo (1), se interceptam, elas são *coplanares*, ou seja, estão situadas no mesmo plano (Figura 5.11). Também são coplanares as retas paralelas do exemplo (3) (Figura 5.12).

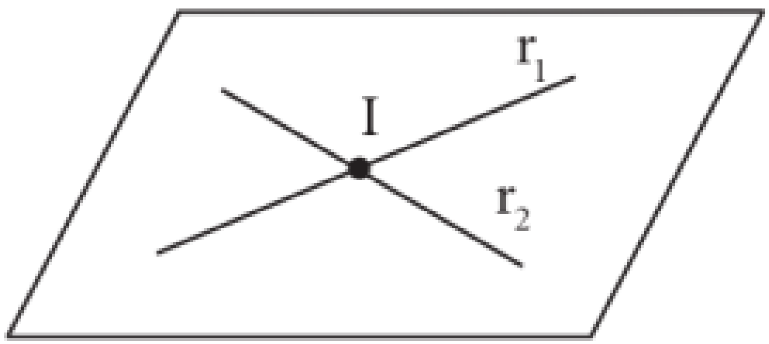


Figura 5.11

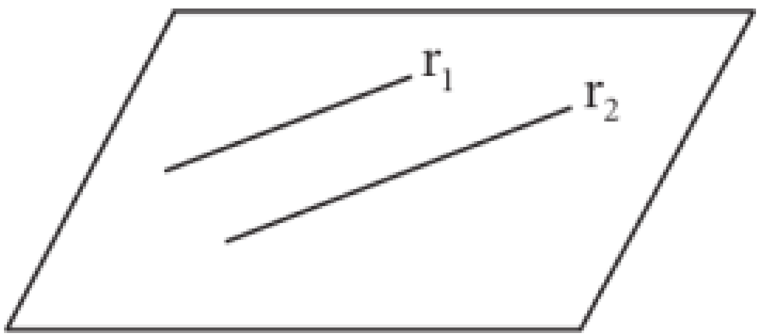


Figura 5.12

Se duas retas não são coplanares, elas são consideradas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas, além de não concorrentes, são não paralelas, e, portanto, não coplanares.

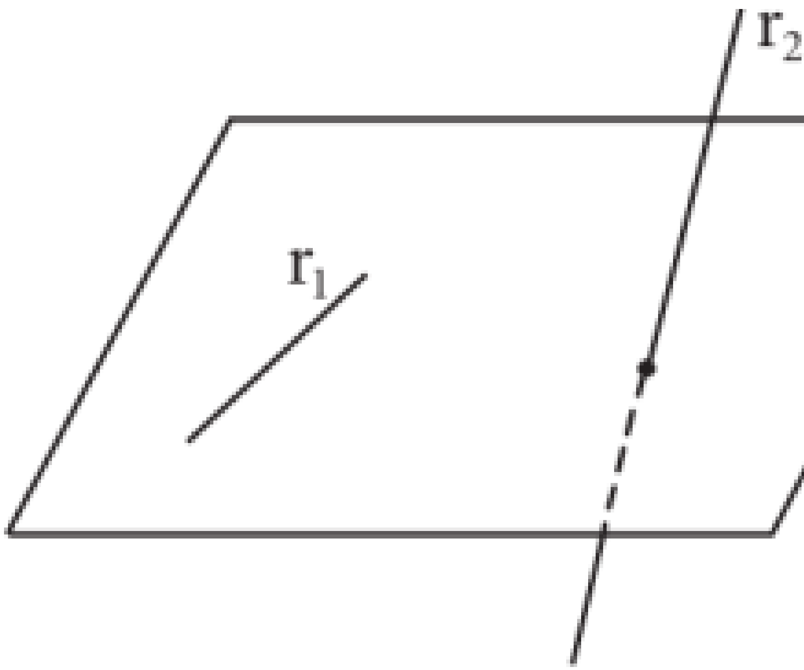


Figura 5.13