Exercícios – Contagem

6.34 (*a*) Quantas placas de carro podem ser feitas se cada uma contiver duas letras distintas seguidas de três algarismos distintos? (*b*) Resolva o problema se o primeiro algarismo não puder ser 0.

6.35 Existem cinco estradas entre A e B e quatro estradas entre B e C. Ache o número de caminhos em que se pode dirigir: (*a*) de A para C passando por B; (*b*) fazendo uma rota circular (ida e volta) de A para C passando por B; (*c*) fazendo uma rota circular de A para C passando por B, sem usar a mesma estrada mais de uma vez.

6.36 Ache o número de maneiras pelas quais seis pessoas podem conduzir um tobogã se uma, de um subconjunto de três, tiver de dirigir.

6.37 (*a*) Ache o número de maneiras pelas quais cinco pessoas podem sentar em fila.

(*b*) Quantas serão as maneiras, se duas das pessoas insistirem em sentar em posições contíguas?

(*c*) Resolva a parte (*a*) assumindo que eles se sentem em torno de uma mesa circular.

(*d*) Resolva a parte (*b*) assumindo que eles se sentem em torno de uma mesa circular.

6.38 Ache o número de maneiras em que cinco livros grandes, quatro livros de tamanho médio e três livros pequenos podem ser colocados em uma prateleira, de tal forma que os livros de mesmo tamanho fiquem juntos.

6.39 (*a*) Ache o número de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra ELEVEM.

(*b*) Quantas delas começam e terminam com a letra E?

(*c*) Quantas têm os três Es juntos?

(*d*) Quantas começam com E e terminam com M?

6.40 (*a*) De quantas maneiras três meninos e duas meninas podem sentar-se em fila?

(*b*) De quantas maneiras eles podem sentar-se em fila se meninos e meninas tiverem de permanecer agrupados?

(*c*) De quantas maneiras eles podem sentar-se em fila se apenas as meninas tiverem de permanecer agrupadas?

6.41 Uma mulher tem 11 amigos próximos.

(*a*) De quantas maneiras ela pode convidar cinco deles para jantar?

(*b*) Quantas são as maneiras, se dois são casados e não comparecerem separadamente?

(*c*) Quantas são as maneiras, se dois deles são brigados e não comparecerem simultaneamente?

6.42 Uma mulher tem 11 amigos próximos dos quais seis também são mulheres.

(*a*) De quantas maneiras ela pode convidar três ou mais para uma festa?

(*b*) De quantas maneiras ela pode convidar três ou mais, se ela quer o mesmo número de homens e mulheres (incluindo ela mesma)?

6.43 Um estudante tem que responder 10 das 13 questões de um exame.

(*a*) Quantas escolhas ele tem?

(*b*) Quantas, se ele deve responder às duas primeiras questões?

(*c*) Quantas, se ele deve responder à primeira ou à segunda questão, mas não a ambas.

(*d*) Quantas, se ele deve responder exatamente a três entre as primeiras cinco questões?

(*e*) Quantas, se ele deve responder a pelo menos três entre as cinco primeiras questões?

6.44 De quantas maneiras 10 estudantes podem ser divididos em três times, um contendo quatro estudantes, e os outros, três?

6.45 De quantas maneiras 14 pessoas podem ser divididas em seis comitês, em que dois dos comitês contêm três membros, e os outros, dois?

6.46 (*a*) Assumindo que uma célula pode estar vazia, de quantas maneiras um conjunto de três elementos pode ser dividido em (i) três células ordenadas, (ii) três células não ordenadas?

(*b*) De quantas maneiras um conjunto de quatro elementos pode ser dividido em (i) três células ordenadas, (ii) três células não ordenadas?

6.47 Uma amostra de 80 proprietários de automóveis revelou que 24 possuíam *vans* e 62 possuíam carros que não eram *vans*. Ache o número k de pessoas que possuem ambos, *vans* e outros tipos de carros.

6.48 Suponha que 12 pessoas leiam o *Wall Street Journal* (W) ou o *Business Week* (B) ou ambos. Sabendo que três pessoas lêem apenas o *Journal* e seis lêem ambos, ache o número k de pessoas que lêem apenas o *Business Week*.

6.49 Mostre que qualquer conjunto de sete inteiros distintos inclui dois inteiros x e y, tais que ou $x + y$ ou $x - y$ seja divisível por 10.

6.50 Considere um torneio em que cada um dos n jogadores joga contra todos os outros e cada jogador ganha pelo menos uma vez. Mostre que existem pelo menos dois jogadores com o mesmo número de vitórias.

Respostas

6.34 (*a*) $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468\,000$; (*b*) $26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421\,200$.

6.35 (*a*) 24; (*b*) 576; (*c*) 360.

6.36 360

6.37 (*a*) 120; (*b*) 48; (*c*) 24; (*d*) 12.

6.38 $3!\,5!\,4!\,3! = 103\,680$.

6.39 (*a*) 120; (*b*) 24; (*c*) 24; (*d*) 12.

6.40 (*a*) 120; (*b*) 24; (*c*) 48.

6.41 (*a*) 462; (*b*) 210; (*c*) 252.

6.43 (*a*) 286; (*b*) 165; (*c*) 110; (*d*) 80; (*e*) 276.

6.44 $\dfrac{10!}{4!\,3!\,3!} \cdot \dfrac{1}{2!} = 2100$ c

6.45 $\dfrac{14!}{3!\,3!\,2!\,2!\,2!\,2!} \cdot \dfrac{1}{2!\,4!}$

6.46 (*a*) (i) $3^3 = 27$, cada elemento pode ser colocado em qualquer uma das três células.

(ii) O número de elementos nas três células pode ser distribuído como a seguir:

(*a*) $[\{3\}, \{0\}, \{0\}]$; (*b*) $[\{2\}, \{1\}, \{0\}]$; (*c*) $[\{1\}, \{1\}, \{1\}]$.

Portanto, o número de partições é $1 + 3 + 1 = 5$.

(*b*) (i) $3^4 = 81$.

(ii) O número de elementos nas três células pode ser distribuído como a seguir:

(*a*) $[\{4\}, \{0\}, \{0\}]$; (*b*) $[\{3\}, \{1\}, \{0\}]$; (*c*) $[\{2\}, \{2\}, \{0\}]$; (*d*) $[\{2\}, \{1\}, \{1\}]$.

Portanto, o número de partições é $1 + 4 + 3 + 6 = 14$.

6.47 Pelo Teorema 6.7, $k = 62 + 24 - 80 = 6$.

6.48 Note que $W \cup B = (W \setminus B) \cup (W \cap B) \cup (B \setminus W)$ e a união é disjunta. Portanto, $12 = 3 + 6 + k$ ou $k = 3$.

6.49 Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ um conjunto de sete inteiros distintos, e seja r_i o resto da divisão de x_i por 10. Considere a seguinte partição de X:

$H_1 = \{x_i: r_i = 0\}$ $\quad$ $H_2 = \{x_i: r_i = 5\}$
$H_3 = \{x_i: r_i = 1 \text{ ou } 9\}$ $\quad$ $H_4 = \{x_i: r_i = 2 \text{ ou } 8\}$
$H_5 = \{x_i: r_i = 3 \text{ ou } 7\}$ $\quad$ $H_6 = \{x_i: r_i = 4 \text{ ou } 6\}$

Existem seis casas de pombos para sete pombos. Se x e y estão em H_1, ou em H_2, então ambos, $x + y$ e $x - y$, são divisíveis por 10. Se x e y estão em um dos outro quatro subconjuntos, então ou $x + y$ ou $x - y$ é divisível por 10, mas não ambos.

6.50 O número de vitórias para cada jogador é pelo menos 1 e, no máximo, $n - 1$. Esses $n - 1$ números correspondem a $n - 1$ casas de pombo que não podem acomodar n jogadores-pombos. Portanto, pelo menos dois jogadores terão o mesmo número de vitórias.