6 Listas

Uma *lista* é uma seqüência ordenada de objetos. Escrevemos uma lista abrindo um parêntese, seguido pelos elementos da lista separados por vírgulas, e fechando o parêntese. Por exemplo, $(1, 2, \mathbb{Z})$ é uma lista cujo primeiro elemento é o número 1, cujo segundo elemento é o número 2, cujo terceiro elemento é o conjunto dos inteiros.

A ordem em que os elementos figuram na lista é significativa. A lista (1, 2, 3) não é a mesma que a lista (3, 2, 1).

Uma lista pode conter elementos repetidos, como (3, 3, 2).

O número de elementos em uma lista é chamado seu *comprimento*. Por exemplo, a lista (1, 1, 2, 1) tem comprimento quatro.

Uma lista de comprimento dois tem um nome especial: é chamada *par ordenado*.

Uma lista de comprimento zero é chamada *lista vazia* e se denota por ( ).

O que significa duas listas serem iguais.

Duas listas são *iguais* se têm o mesmo comprimento e se os elementos nas posições correspondentes nas duas listas são iguais. As listas (a, b, c) e (x, y, z) são iguais se e somente se $a = x$, $b = y$ e $c = z$.

Linguagem matemática! Outra expressão que os matemáticos usam para listas é *upla*. Uma lista de n elementos é conhecida como uma n-upla (ênupla).

Contagem de Listas de Dois Elementos

Nesta seção, vamos abordar questões do tipo: Quantas listas podemos formar?

Exemplo 6.1

Suponha que queiramos fazer uma lista de dois elementos, onde os valores da lista podem ser quaisquer dos quatro algarismos 1, 2, 3 ou 4. Quantas listas são possíveis? A abordagem mais direta para responder a essa pergunta consiste em escrever todas as possibilidades.

$$
\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4)
\end{array}
$$

Perguntemos então: Quantas listas de dois elementos são possíveis quando há n escolhas para o primeiro elemento e m escolhas para o segundo elemento? Suponha que os elementos possíveis na primeira posição da lista sejam os inteiros 1 a n e que os elementos possíveis na segunda posição sejam os inteiros 1 a m.

Construímos uma tabela de todas as possibilidades como anteriormente:

$$\begin{array}{cccc}
(1, 1) & (1, 2) & \ldots & (1, m) \\
(2, 1) & (2, 2) & \ldots & (2, m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(n, 1) & (n, 2) & \ldots & (n, m)
\end{array}$$

Há n linhas (para cada primeira escolha possível), e cada linha contém m valores. Assim, o número possível de tais listas é

$$\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ vezes}} = m \times n$$

Princípio da Multiplicação

Consideremos sequencias (listas) de dois elementos em que há n escolhas para o primeiro elemento e, para cada uma destas escolhas, há m escolhas para o segundo elemento. Então o número de listas é nxm.

Exemplo 6.3

As iniciais de uma pessoa constituem uma lista formada pelas iniciais de seu primeiro e seu último nome. Por exemplo, as iniciais do autor são ES. De quantas maneiras podemos dispor as iniciais do nome de uma pessoa? De quantas maneiras podemos dispor essas iniciais de maneira que as letras sejam diferentes?

A primeira questão pede o número de listas de dois elementos onde há 26 escolhas para cada elemento. Há 26^2 listas.
A segunda questão pede o número de listas de dois elementos onde há 26 escolhas para o primeiro elemento e, para cada uma dessas escolhas, 25 escolhas do segundo elemento. Há, pois, 26×25 de tais listas.

Outra maneira de responder à segunda questão no Exemplo 6.3 é a seguinte: há 26^2 maneiras de compor as iniciais (admitidas as repetições). Dessas, há 26 conjuntos "maus" de iniciais em que há uma repetição, a saber, AA, BB, CC, ..., ZZ. As listas restantes são as que desejamos contar, havendo, assim, $26^2 - 26$ possibilidades. Como $26 \times 25 = 26 \times (26 - 1) = 26^2 - 26$, as duas respostas concordam.

Note que escrevemos as respostas a essas questões como 26^2 e 26×25, e não como 676 e 650. Embora as duas respostas sejam corretas, as respostas 26^2 e 26×25 são preferíveis, porque retêm a essência do raciocínio usado em sua dedução. Além disso, a conversão de 26^2 e 26×25 para 676 e 650 não tem interesse e pode ser feita facilmente por qualquer pessoa com uma calculadora.

Exemplo 6.4

Um clube tem dez membros que desejam eleger um presidente e um vice-presidente. De quantas maneiras é possível preencher os dois postos?

Reformulamos essa questão como um problema de contagem de lista. Quantas listas de duas pessoas podemos formar, onde as duas pessoas na lista são escolhidas de uma coleção de dez candidatos, a mesma pessoa não podendo ser escolhida duas vezes? Há dez escolhas para o primeiro elemento da lista. Para cada escolha do primeiro elemento (para cada presidente), há nove escolhas possíveis para o segundo elemento da lista (o vice-presidente). Pelo princípio da multiplicação, há 10×9 possibilidades.

Vamos aplicar o princípio da multiplicação a listas mais longas. Consideremos uma lista de comprimento três. Suponha que tenhamos a escolhas para o primeiro elemento da lista, e para cada escolha do primeiro elemento haja b escolhas para o segundo elemento, e c escolhas para o terceiro elemento. Assim, ao todo, há abc listas possíveis. Para ver por que, imaginemos que a lista de três elementos consista em duas partes: os dois elementos iniciais e o elemento final. Há ab maneiras de escolher os dois primeiros elementos (pelo princípio da multiplicação!) e c maneiras de completar o último elemento, uma vez especificados os dois primeiros. Assim, novamente pelo princípio da multiplicação, há $(ab)c$ maneiras de completar as listas. A extensão dessas idéias a listas de comprimento quatro ou mais é análoga.

Exemplo 6.5

Voltemos ao Exemplo 6.4. Temos um clube com dez membros e desejamos eleger uma diretoria composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras podemos fazer essa escolha (admitindo que nenhum membro do clube possa preencher dois cargos)? Tracemos o diagrama a seguir:

Presidente	Vice-presidente	Secretário	Tesoureiro
$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$

Isso nos mostra que há dez escolhas para presidente. Escolhido este, há nove escolhas para o vice-presidente, havendo, pois, 10×9 maneiras de preencher os dois primeiros postos. Preenchidos estes, há oito maneiras de preencher o próximo posto (secretário), havendo $(10 \times 9) \times 8$ maneiras de preencher os três primeiros postos. Finalmente, preenchidos os três postos, há sete maneiras de escolher o tesoureiro; há, pois $(10 \times 9 \times 8) \times 7$ maneiras de selecionar a chapa de dirigentes.

Quando se admitem repetições, temos n escolhas para o primeiro elemento da lista, n escolhas para o segundo elemento da lista, e assim por diante, até n escolhas para o último elemento da lista. Ao todo, há

$$\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k \tag{1}$$

listas possíveis.

Suponha agora que preenchamos a lista de comprimento k com n valores possíveis, não se admitindo, agora, repetições. Há n maneiras de selecionar o primeiro elemento da lista. Feito isso, há $n-1$ escolhas para o segundo elemento da lista, $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, etc., e, finalmente $n-(k-1)=n-k+1$ maneiras de preencher a posição k. Portanto, o número de maneiras de compor uma lista de comprimento k onde os elementos são escolhidos de um universo de n possibilidades, *não* se admitindo dois elementos iguais na lista, é

$$n \times [n-1] \times [n-2] \times \ldots \times [n-(k-1)] \tag{2}$$

Como a expressão $n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$ ocorre com bastante freqüência, há uma notação especial para ela, a saber:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$$

A notação especial para $n(n-1) \ldots (n-k+1)$ é $(n)_k$. Uma notação alternativa, ainda em uso em algumas calculadoras, é ${}_nP_k$.

A notação é chamada *fatorial incompleto*. Resumimos nossos resultados sobre listas com ou sem repetição, utilizando concisamente essa notação.

Teorema 6.6

O número de listas de comprimento k, cujos elementos são escolhidos de um conjunto de n elementos possíveis, é

$$= \begin{cases} n^k & \text{caso se permitam repetições} \\ (n)_k & \text{caso não se permitam repetições} \end{cases}$$