1º) a) A SOLUÇÃO GERAL DO MHS É DO TIPO

GABARITO PROVA 19/03/15

$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$ *(1); DE MANEIRA QUE:

$\Rightarrow v(t) = -\omega A\,\text{sen}(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$ *(2), SE ATRIBUIRMOS AS CONDIÇÕES INICIAIS ($t=0$) EM (1) E (2) TEMOS:

$x(0) = x_0 = A\cos(\omega\cdot 0) + B\cdot\text{sen}(\omega\cdot 0) \Rightarrow \boxed{x_0 = A}$ E $v(0) = v_0 = \omega\cdot B$; $\boxed{B = \frac{v_0}{\omega}}$, LOGO

$$\boxed{x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cdot\text{sen}(\omega t)}$$ C.Q.D

$v(t) = -\omega\cdot x_0\cdot\text{sen}(\omega t) + \cancel{\omega}\cdot\frac{v_0}{\cancel{\omega}}\cdot\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{v(t) = -\omega x_0\cdot\text{sen}(\omega t) + v_0\cdot\cos(\omega t)}$

C.Q.D

b) MOSTRAR QUE $v^2 - ax = v_0^2 - a_0 x_0 = \omega^2 R^2$; $a(t) = -\omega^2\cdot x_0\cos(\omega t) - \omega\cdot v_0\,\text{sen}(\omega t)$

$v^2 - ax = \left[-\omega\cdot x_0\cdot\text{sen}(\omega t) + v_0\cdot\cos(\omega t)\right]^2 - \left[-\omega^2 x_0\cos(\omega t) - \omega\cdot v_0\,\text{sen}(\omega t)\right]\cdot\left[x_0\cdot\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\cdot\text{sen}(\omega t)\right]$

$\Rightarrow [\omega^2 x^2\,\text{sen}^2(\omega t) - 2\omega\cdot x_0 v_0\cdot\text{sen}(\omega t)\cdot\cos(\omega t) + v_0^2\cdot\cos^2(\omega t)] + \omega^2\cdot x_0^2\cdot\cos^2(\omega t) + \dots +$

$+ \omega^2\cdot x_0\cdot\frac{v_0}{\omega}\cdot\cos(\omega t)\cdot\text{sen}(\omega t) + \omega\cdot v_0\cdot x_0\cdot\text{sen}(\omega t)\cdot\cos(\omega t) + \omega\cdot\frac{v_0^2}{\omega}\cdot\text{sen}^2(\omega t)$

EM $t=0$;

$v_0^2 - ax = v_0^2 + \omega^2\cdot x_0^2$; NAS CONDIÇÕES INICIAIS $v_0 = 0$ E $x_0 = A = R$

$v^2 - ax = 0 + \omega^2\cdot R^2 \Rightarrow \boxed{v^2 - ax = \omega^2\cdot R^2}$ C.Q.D

– UMA SEGUNDA OPÇÃO É PARTIR DA EQ. INICIAL $\Rightarrow x = R\cdot\cos(\omega t)$.

$v = -\omega\cdot R\,\text{sen}(\omega t)$; $a = -\omega^2 R\cdot\cos(\omega t)$; ASSIM PARA PROVA QUE:

$v^2 - ax = \omega^2\cdot R^2$; TEMOS

$v^2 - ax = \left[\overbrace{-\omega\cdot R\cdot\text{sen}(\omega t)}^{v}\right]^2 - \left[\overbrace{-\omega^2\cdot R\cdot\cos(\omega t)}^{a}\cdot\overbrace{(R\cdot\cos(\omega t))}^{x}\right]$.

$v^2 - ax = \omega^2\cdot R^2\cdot\text{sen}(\omega t) + \omega^2\cdot R^2\cdot\cos^2(\omega t)$; EM $t=0$ TEMOS

$$\boxed{v^2 - ax = \omega^2\cdot R^2}$$ C.Q.D

"A BELEZA DA MATEMÁTICA ESTÁ NO SEU PODER DE MANIPULAÇÃO"

[signature]

2º) $m = 0{,}650\,kg$; $K = 35\,N/m$; $R = 0{,}045\,m$ $\qquad x = 0{,}03\,m$

a) $E_m = \frac{1}{2} K R^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}(35)\cdot(0{,}045)^2 = \boxed{0{,}0354\,J}$

b) $v = \omega \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$; $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$;

$|v| = \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow v = 7{,}33 \cdot \sqrt{(0{,}045)^2 - (0{,}03)^2} = \boxed{0{,}246\,m/s}$

3º) $x = 4 \cdot \cos(3\pi t + \pi)$;

$\omega = 3\pi\,rad/s$

$R = 4\,m$

a) $\omega = 2\pi f \Rightarrow 3\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} \cdot f \Rightarrow \boxed{f = 1{,}5\,Hz}$; $\boxed{R = 4\,m}$

b) $x = 4\cos(3\pi(0{,}250) + \pi) \cong \boxed{2{,}83\,m}$

4º) $U = \frac{1}{2} K x^2$; $x = R \cdot \cos(\omega t)$; $U = \frac{1}{2} K (R \cdot \cos(\omega t))^2 \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} K R^2 \cos^2(\omega t)}$

$0 < t < 1{,}55\,s$; $\omega = 5$; $R = 0{,}06$; $K = 3{,}24\,N/m$

a) A VARIAÇÃO É DADA PELA DERIVADA NO TEMPO, ASSIM:

$U = \frac{1}{2} K R^2 [\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} K R^2 [-\omega \cdot sen(\omega t) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot sen(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2} K R^2 \omega \underbrace{[sen(\omega t) \cdot \cos(\omega t) + sen(\omega t) \cdot \cos(\omega t)]}_{\to\, sen(2\omega t)}$

$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2} K R^2 \omega \cdot sen(2\omega t)$; # A TAXA DA MUDANÇA É MÁXIMA QUANDO A FUNÇÃO "SENO" É IGUAL A "1" OU SEJA #:

$2\omega t = \frac{\pi}{2}$; $2\omega t = 2\pi + \frac{\pi}{2}$; $2\omega t = 3\pi + \frac{\pi}{2}$; ... $\boxed{2\omega t = 2\pi m + \frac{\pi}{2}}$

m = INTEIRO

$2\omega t = 2\pi m + \frac{\pi}{2}$;

$t = \frac{\pi \cdot m}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}$; ASSIM ;

P/ $m = 0$ $\qquad t_1 = \frac{\pi}{4(5)} = \boxed{0{,}157\,s}$

P/ $m = 1$ $\qquad t_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20} = \boxed{0{,}785\,s}$

P/ $m = 2$ $\qquad t_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{20} = \boxed{1{,}413\,s}$

P/ $m = 3$ $\qquad t_4 = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{20} = \boxed{2{,}042\,s} \Leftarrow$ # FORA DO INTERVALO #

SOLUÇÃO:

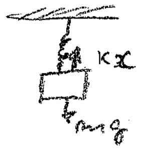
$t = (0{,}157\,s;\ 0{,}785\,s;\ 1{,}413\,s)$

b) A MÁXIMA É O VALOR EM MÓDULO DA DERIVADA QUANDO SENO É IGUAL A 1

$\left|\frac{dU}{dt}\right| = \frac{1}{2} K R^2 \omega =$

$\left|\frac{dU}{dt}\right| = \frac{1}{2}(3{,}24)\cdot(0{,}06)^2\cdot(5) = \boxed{0{,}029\,J}$

5º) $R = 0{,}042\,m$; $m_1 = 0{,}012\,kg$; $m_2 = 0{,}032\,kg$ $\qquad g = 9{,}81\,m/s^2$



$F = P \Rightarrow -Kx = -m \cdot g$;

$R = x \Rightarrow K = \frac{mg}{R} \Rightarrow K = \frac{0{,}012\cdot(9{,}81)}{0{,}042} = \boxed{2{,}80\,N/m}$; COMO: $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$; $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}032}{2{,}80}} \Rightarrow$ # $\boxed{T = 0{,}671\,s}$ #

6º) SE EM $K_s = 4{,}0\,J$ ENTÃO A MÁXIMA É $6{,}0\,J$ PELO GRÁFICO ; E $x_m = 12\,cm = 0{,}12\,m$

$K_{max} = \frac{1}{2} K x_m^2 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (0{,}12)^2 \Rightarrow 12 = K \cdot (0{,}0144) \Rightarrow \boxed{K = 833{,}33\,N/m}$