Arranjos

Em uma reunião de um condomínio residencial, foi realizada uma votação para definir os cargos de síndico e subsíndico do prédio.

Cinco moradores: A, B, C, D e E candidataram-se a ocupar esses cargos. De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado dessa votação?

Síndico	Subsíndico
A	B
A	C
A	D
A	E
B	A
B	C
B	D
B	E
C	A
C	B

Síndico	Subsíndico
C	D
C	E
D	A
D	B
D	C
D	E
E	A
E	B
E	C
E	D

Observe que cada possibilidade acima representada corresponde a um **agrupamento ordenado** de duas pessoas escolhidas entre os cinco candidatos.

Note, por exemplo, que o par ordenado (A, B) é diferente do par ordenado (B, A), pois na primeira situação o síndico é *A* e o subsíndico é *B* e, na segunda situação, ocorre o contrário.

Dizemos que cada resultado da votação corresponde a um **arranjo** dos cinco elementos (candidatos) tomados dois a dois (isto é, escolhemos dois entre os cinco para formar o agrupamento ordenado).

Vamos, por meio do PFC, contar o número total de arranjos possíveis (indicaremos por $A_{5,\,2}$):

- Para escolha do síndico, há cinco possibilidades.
- Definido o síndico, sobram quatro opções para a escolha do cargo de subsíndico.

Assim, $A_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$.

Definição

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se **arranjo** dos n elementos, tomados k a k (com $k \leqslant n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Contagem do número de arranjos

Dados n elementos distintos, vamos indicar por $A_{n,\,k}$ o número de arranjos desses elementos tomados k a k.

Vamos usar o PFC:

- O 1º elemento da sequência pode ser escolhido de n formas possíveis.
- O 2º elemento da sequência pode ser escolhido de $n - 1$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.
- Feitas as duas primeiras escolhas, há $n - 2$ maneiras diferentes de escolher o 3º elemento da sequência, pois não pode haver repetição.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $k - 1$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = n - k + 1$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $A_{n,k}$) é:

$$\boxed{A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \quad (1)$$

Para obter uma expressão equivalente a (1) usando fatorial, basta multiplicá-la e dividi-la por: $(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$. De fato:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a n!.

Assim:

$$\boxed{A_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}} \quad (2)$$

Os problemas que envolvem contagem do número de arranjos podem ser resolvidos pelo PFC ou pela aplicação das fórmulas equivalentes (1) ou (2).

Observação

As permutações, estudadas na página 263, constituem um caso particular de arranjos.

Dados *n* elementos distintos, todo arranjo (agrupamento ordenado) formado exatamente por esses *n* elementos corresponde a uma permutação desses elementos.

Com efeito, fazendo $k = n$ na fórmula do arranjo, vem:

$$A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!}, \text{ isto é, } P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Nessa última expressão, note a conveniência de termos definido $0! = 1$.

9. A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

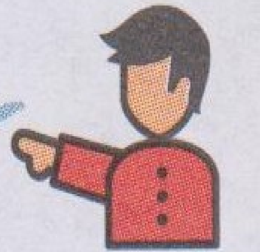
Solução

Para a escolha das letras (lembre-se: BA $\neq$ AB), o número de possibilidades é $A_{26,2} = \frac{26!}{24!} = 26 \cdot 25 = 650$.

Para cada uma das 650 possibilidades de combinações entre letras, o número de maneiras de se escolher os algarismos é $A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$ (note que $012 \neq 201$).

Assim, pelo PFC, o total de senhas possíveis é $650 \cdot 720 = 468000$.

Pense nisto: Sem aplicar a fórmula, a resolução é dada por: $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$



COMBINAÇÕES

Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente duas dessas frutas?

Vamos representar, uma a uma, as possibilidades de mistura:

mamão e banana	maçã e morango	abacate e mamão
mamão e maçã	maçã e laranja	abacate e banana
mamão e morango	banana e morango	abacate e maçã
mamão e laranja	banana e laranja	abacate e morango
banana e maçã	morango e laranja	abacate e laranja

Observe que escolher {mamão e laranja}, por exemplo, é o mesmo que escolher {laranja e mamão}, pois não importa a ordem em que as frutas sejam escolhidas.

Assim, cada escolha que Jaqueline poderá fazer consiste em um **agrupamento não ordenado** de duas frutas escolhidas entre as seis disponíveis. Dizemos que cada uma das possibilidades anteriores é uma **combinação** das seis frutas tomadas duas a duas, isto é, um **subconjunto** formado por dois elementos (frutas) escolhidos entre seis (frutas) disponíveis.

Como podemos contar o número de combinações de vitamina?

Inicialmente, podemos usar o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de duas frutas:

$$\underset{\text{1ª fruta}}{\underset{\uparrow}{6}} \cdot \underset{\text{2ª fruta}}{\underset{\uparrow}{5}} = 30$$

Esse cálculo inclui escolhas repetidas, pois sabemos que a ordem de escolha das frutas não importa.

O número de ordens possíveis em que duas determinadas frutas podem ser escolhidas é:

$$P_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

Assim, como cada escolha foi contada duas vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

Definição

Dados n elementos distintos, chama-se **combinação** dos n elementos tomados k a k ($k \leqslant n$) qualquer **subconjunto** formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n.

Contagem do número de combinações

Sejam *n* elementos distintos.

Vamos encontrar um método (baseado nos exemplos anteriores) para contar o número de combinações desses *n* elementos tomados *k* a *k* ($k \leqslant n$). Indicaremos esse número por $C_{n,\,k}$ ou por $\binom{n}{k}$.

- Usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por *k* elementos distintos, escolhidos entre os *n* elementos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n,\,k}$$

- Usamos o PFC para contar o número de sequências distintas que podem ser formadas com os *k* elementos escolhidos:

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

- Como qualquer permutação dos elementos de uma sequência dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos *n* elementos tomados *k* a *k* é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} \Rightarrow \boxed{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!}}$$

Aplicando a fórmula do arranjo, vem:

$$C_{n,k} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!} \Rightarrow \boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Observações

1. Quando k = 1, o número de combinações de *n* elementos distintos, tomados um a um é igual a *n*, pois corresponde ao número de subconjuntos formados com exatamente um elemento escolhido entre os *n* elementos. De fato:

$$C_{n,\,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1!\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{1!} = n$$

2. Quando k = n, o número de combinações de *n* ($n \geqslant 1$) elementos distintos, tomados *n* a *n*, é igual a 1. De fato:

$$C_{n,\,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

3. Observe que: $C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{\underbrace{[n-(n-p)]}_{=\,p}!\cdot(n-p)!} = C_{n,n-p}$$

Assim, temos:

$$C_{6,\,4} = C_{6,\,2}\,;\; C_{10,\,3} = C_{10,\,7}\,;\; \binom{11}{5} = \binom{11}{6};\ \text{etc.}$$

Pense nisto: Em um grupo formado por cinco pessoas, a quantidade de duplas (não ordenadas) que podemos formar é igual à quantidade de trios (não ordenados).