Quando $A \cdot B$ e $B \cdot A$ existem e $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que A e B comutam. Acompanhe o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Não vale a propriedade do anulamento do produto na multiplicação de matrizes.

A conhecida propriedade $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, válida para a e b reais, não é válida para matrizes. Isso significa que é possível que o produto entre duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma das matrizes seja nula.

Observe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido

7. Determinar os valores reais de x e y de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

Solução:

Devemos ter $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 - 3x \Rightarrow x = 0 \\ 2x = 4x \Rightarrow x = 0 \\ -9 + 4y = 2y - 3 \Rightarrow y = 3 \\ -3x + 4 = 4 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$$

Exercícios

39. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{22}

b) c_{31}

c) c_{33}

40. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43}.

41. Determine x e y, a fim de que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

42. Seja A uma matriz quadrada de ordem n; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

43. Generalizando a definição dada no exercício anterior, temos:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e A é uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{n \text{ vezes}}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^2 c) A^4 e) A^{106}

b) A^3 d) A^{35}

44. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m+4 \end{bmatrix}$, determine o valor de *m*.

45. O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência de pessoas na casa, em um final de semana, e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

$$\begin{array}{r} \\ \text{sábado} \\ \text{domingo} \end{array} \begin{array}{c} \text{rapazes moças} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ ? & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

Thinkstock/Getty Images

O gerente se esqueceu de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias havia sido a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes é R\$ 15,00 e para moças é R\$ 12,00:

a) represente, por meio da multiplicação de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa em cada dia;
b) determine o valor do campo que ficou sem ser preenchido.

46. Resolva a equação $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

47. A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos A, B e C nas provas de Português, Matemática e Conhecimentos Gerais em um exame vestibular.

	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em Conhecimentos Gerais), qual a multiplicação de matrizes que permite determinar a pontuação final de cada aluno? Determine a pontuação de cada um.

48. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $A \cdot B = 0_{4 \times 1}$, determine os valores de *x* e *y*.

49. Determine *x* e *y* reais a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ comutem.

50. Um laboratório fabrica o antiácido efervescente "AZIAZERO" em duas versões: tradicional (T) e especial (E). Na tabela seguinte, temos a composição de envelopes de 5 g, nas duas versões:

Graphorama

Componente \ Versão	T	E
Bicarbonato de sódio	2,3 g	2,5 g
Carbonato de sódio	0,5 g	0,5 g
Ácido cítrico	2,2 g	2 g

a) Em um certo mês foram fabricados 6 000 envelopes na versão T e 4 000 envelopes na versão E. Calcule, em kg, a quantidade necessária de cada componente para a fabricação dessas 10 000 unidades.
b) Represente, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item *a*.
c) Em um outro mês foram produzidos 15 000 envelopes do "AZIAZERO". Calcule a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

51. Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

52. Uma dona de casa registrou, na tabela seguinte, as quantidades (em gramas) de frutas compradas em duas semanas consecutivas, em um mesmo supermercado:

Fruta / Quantidade (g)	Banana	Maçã	Laranja	Mamão
1ª semana	2700	2430	3450	4155
2ª semana	1640	3120	3390	3700

Os preços do quilograma (kg) da banana, maçã, laranja e mamão, em vigor nesse período, eram respectivamente R$ 2,35, R$ 3,40, R$ 1,70 e R$ 2,60.

Determine, a partir do cálculo de um produto de matrizes, a quantia, em reais, gasta pela dona de casa, em cada semana.

Aplicações

Computação gráfica e matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D – duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para a construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

As três transformações básicas são: **translação**, **rotação** e **escala**. Vamos estudá-las, relacionando-as com a teoria das matrizes e com a Trigonometria.

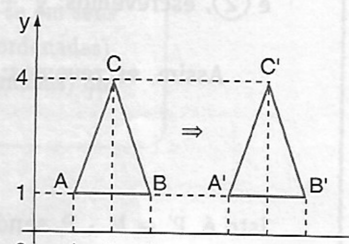
Representaremos um ponto qualquer P(x, y) de uma figura pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o ponto correspondente P'(x', y'), obtido pela transformação, por $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Para cada transformação, vamos obter uma relação entre P e P' por meio de uma matriz (M) de transformação.

O filme *Os Vingadores* apresenta personagens criados por computação gráfica, como Hulk.

TRANSLAÇÃO

A translação é uma transformação que desloca uma figura sem alterar sua forma e suas dimensões. Esse deslocamento pode ser vertical, horizontal ou segundo uma certa direção.

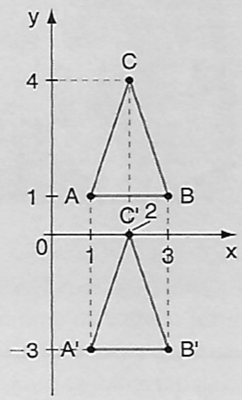
Consideremos o triângulo ABC ao lado, o qual é transformado no triângulo A'B'C' por uma translação horizontal.



Observe que, nessa transformação, a abscissa de cada ponto do △ABC é deslocada quatro unidades à direita, e a respectiva ordenada não sofre alteração.

Temos, portanto: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, isto é, P' = P + M, sendo $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

Suponha agora que o △ABC fosse deslocado, na vertical, quatro unidades para baixo, como mostra a figura seguinte:



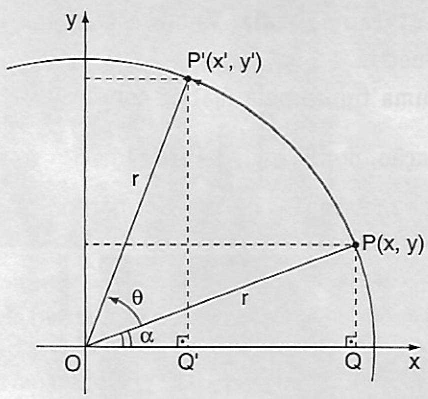
Observe, no △A'B'C', obtido pela translação, que a ordenada de cada um de seus pontos é deslocada quatro unidades para baixo e a respectiva abscissa não sofre alteração.

Assim, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e, desse modo, P' = P + M, sendo

$M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

ROTAÇÃO

Vamos considerar unicamente a rotação ("giro") de um ponto P(x, y), em torno da origem (0, 0), de um ângulo de medida θ graus (θ > 0), tomado no sentido anti-horário.



De acordo com o △OPQ, o ponto P(x, y) tem suas coordenadas expressas por:

$$x = r \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$y = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (2)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a medida do raio da circunferência de centro na origem, passando por P e P'.

Ao girarmos P de um ângulo de medida θ (graus), ele se transforma no ponto P'. De acordo com o △OP'Q', temos:

- $\cos(\alpha + \theta) = \dfrac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cdot (\cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta)$ e, usando (1) e (2), escrevemos: $x' = r \cdot \left(\dfrac{x}{r}\cos\theta - \dfrac{y}{r}\operatorname{sen}\theta\right) = \boxed{x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta}$.

- $\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \dfrac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = r \cdot (\operatorname{sen}\alpha \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\alpha)$ e, usando (1) e (2), escrevemos: $y' = r \cdot \left(\dfrac{y}{r}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \dfrac{x}{r}\right) = \boxed{y' = y \cdot \cos\theta + x \cdot \operatorname{sen}\theta}$.

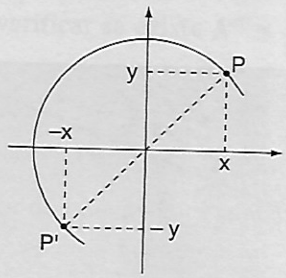
Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, P' = M · P, sendo $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

3 Exemplo

Observe a figura seguinte, em que o ponto P(x, y) é rotacionado em torno da origem, no sentido anti-horário, de 180°. Quais são suas novas coordenadas?



Como $\theta = 180°$, temos:

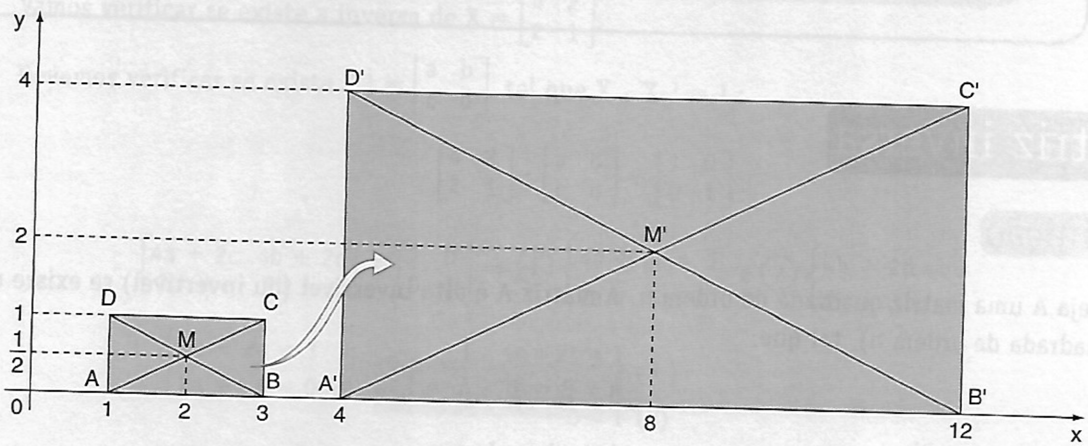
$$M = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $P' = M \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x$ e $y' = -y$

ESCALA

Nessa transformação, ocorre uma modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução), originando outra figura, semelhante ou não à primeira.

Na figura seguinte, o retângulo ABCD é transformado no retângulo A'B'C'D'. Cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$; observe que os retângulos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes.



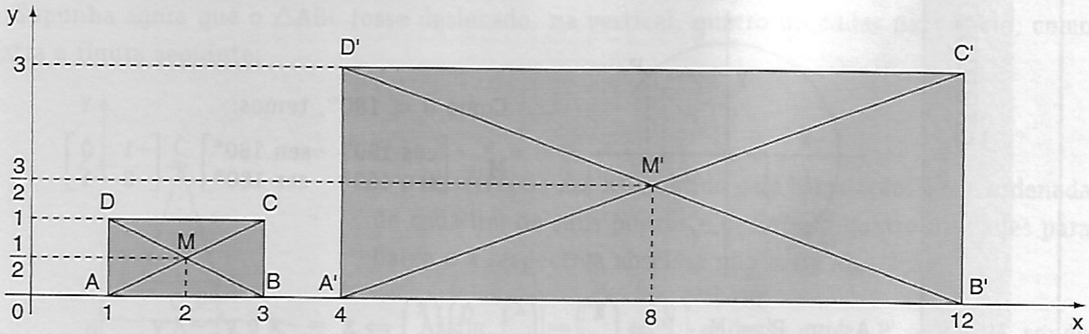
Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Pense nisto: Em um retângulo, as diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Veja os pontos M e M'. Suas abscissas (e ordenadas) são dadas pela média aritmética entre as abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais.

Veja agora a transformação abaixo: cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 3 \cdot y$:



Observe, nesse caso, que os retângulos ABCD e A'B'C'D' *não* são semelhantes.

Temos: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz da transformação.

Referências bibliográficas:
- www.ic.unicamp.br
- Boldrini, José L.; Costa, Sueli I. Rodrigues; Figueiredo, Vera Lúcia e Wetzler, Henry G. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

Matriz inversa

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem *n*. A matriz A é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz B (quadrada de ordem *n*), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Lembre que I_n representa a matriz identidade de ordem *n*.

Nesse caso, B é dita **inversa** de A e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$.

Exemplo 4

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não invertível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, apresentaremos, a seguir, um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas.

Vamos trabalhar com matrizes 2×2.

Exemplo 5

Vamos verificar se existe a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}, \text{ cuja solução é } a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}, \text{ cuja solução é } b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}$$

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

Exemplo 6

Vamos verificar se existe a inversa de $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Devemos verificar se existe $X^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $X \cdot X^{-1} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a + 2c & 4b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (1) \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \text{ e } (2) \begin{cases} 4b + 2d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \; (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a} + \cancel{2c} = 1 \\ \cancel{-4a} - \cancel{2c} = 0 \end{cases} (+) \quad \overline{0 = 1 \text{ (F)}}$$

O sistema acima não admite soluções, pois não existem *a* e *c* reais tais que $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de X (o sistema (2) também não admite solução. Verifique.).

Pense nisto: A matriz nula $0_{2 \times 2}$ é inversível?
A matriz identidade I_2 é inversível?

Observação

O processo apresentado nos exemplos anteriores pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem *n*, $n \geq 2$. Vale lembrar, no entanto, que, para $n \geq 3$, o processo é trabalhoso. No capítulo seguinte, estudaremos métodos de resolução de sistemas lineares 3×3, que podem ajudar a encontrar a inversa de algumas matrizes 3×3.

Exercício resolvido

8. Resolver a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

Para garantir a existência do produto $A \cdot X$, X deve ser uma matriz 2×1, a saber $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$. Veja a continuação no exercício resolvido 6, na página 94.

2º modo:

Supondo que A seja invertível, de $A \cdot X = B$, temos:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ (multiplicamos, à esquerda, por A^{-1})

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a propriedade associativa da multiplicação)

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a definição de matriz inversa)

$X = A^{-1} \cdot B$ (*) (usamos a propriedade da matriz identidade)

Pense nisto: Na primeira passagem, poderíamos ter multiplicado, à direita, os dois membros por A^{-1}?

Assim, verifiquemos se A é invertível:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 7c & 5b + 7d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguem os sistemas: $\begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3$ e $c = -2$ e $\begin{cases} 5b + 7d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -7$ e $d = 5$

Assim, concluímos que A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Logo, em (*), vem:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercícios

53. Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

54. Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

55. Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

56. Qual é a inversa da matriz identidade de ordem 2?

57. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Determine:

a) $A^{-1} + B$ b) $A^{-1} \cdot B$ c) $B^{-1} \cdot A$

58. A inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$.

Determine *x* e *y*.

59. Seja A^{-1} a inversa de $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A + A^{-1}$ b) $(A^{-1})^2 + A^2$

60. Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Determine A^{-1}.

b) Usando o resultado do item *a*, resolva a equação $A \cdot X = B$.

Desafio

(Obmep) Alvino está a meio quilômetro da praia quando começa a entrar água em seu barco, a 40 litros por minuto. O barco pode suportar, no máximo, 150 litros de água sem afundar. A velocidade do barco é 4 quilômetros por hora. Quantos litros de água por minuto, no mínimo, Alvino deve tirar do barco para chegar à praia?

27. a) F; $\cos\left(\frac{\pi}{6}+k2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) V

c) F; o valor mínimo é −2

d) F; *f* é uma função afim

e) V

f) V

28. a) 2010: 418 (US$ milhões);

2015: 409 (US$ milhões);

2020: 391 (US$ milhões).

b) 3 vezes; 382 (US$ milhões)

29. a) $D=\mathbb{R}$; $Im=[-1,1]$; $p=\frac{2\pi}{3}$

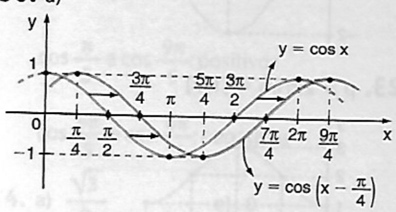
b) $D=\mathbb{R}$; $Im=[-3,3]$; $p=2\pi$

c) $D=\mathbb{R}$; $Im=[-3,1]$; $p=4\pi$

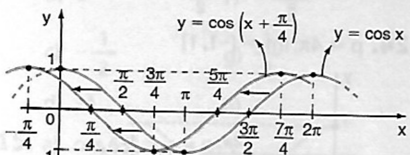
d) $D=\mathbb{R}$; $Im=\mathbb{R}$; *f* não é periódica

e) $D=\mathbb{R}$; $Im=[-4,4]$; $p=\frac{\pi}{3}$

30. a)



b)



31. a) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$p=\pi$

b) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$p=\pi$

c) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$p=\frac{\pi}{2}$

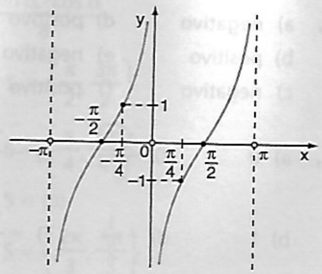
d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$p=\pi$

32. a) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$; $Im=\mathbb{R}$

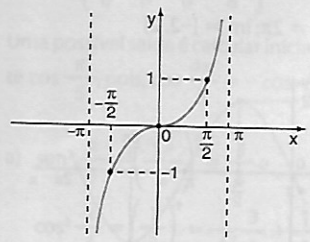
b) $p=\pi$

c)



33. $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq(1+2k)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$;

$p=2\pi$



Desafio

2

Capítulo 5
Transformações

Exercícios

1. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d) $2-\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ f) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **3.** $\frac{56}{65}$

4. $5\sqrt{6}$ cm e $5(\sqrt{3}+1)$ cm

5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

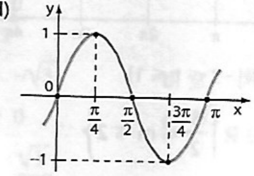
6. a) $\sqrt{16,3}$ (aproximadamente 4,04 km)

b) 2,925 km

7. $-2+\sqrt{3}$ **8.** $\frac{5}{9}$; 0 **9.** $\frac{15}{23}$

10. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) π c) 1

d)



11. a) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ d) 2º Q

b) $\frac{1}{9}$ e) 4º Q

c) $-4\sqrt{5}$

12. $\frac{24}{25}$ **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{5}{13}$

15. 93,75 m

16. a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

17. a) 30º, 60º e 90º b) 10 cm

18. 0,47

19. Porque teríamos $\cos\alpha > 1$.

20. a) F b) V c) F d) F e) V

21. $-\frac{7}{9}$

22. a) $\frac{2}{3}$ b) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

23. $\cos x=-\frac{2}{7}$ e $\operatorname{sen} x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

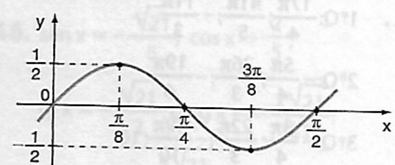
24. $\frac{3}{5}$

25. $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{5}$ e $\cos x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

26. a) $D=\mathbb{R}$; $p=\frac{\pi}{2}$; $Im=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

c)



Desafio

66 660

Capítulo 6
Matrizes

Exercícios

1. a) 3×2 c) 2×2 e) 3×1

b) 1×4 d) 3×3 f) 3×4

2. a) 4 c) 1

b) ∄ d) 1

3. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ **4.** $B=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

5. 0

6. a) 1 b) 8 c) $\frac{5}{6}$

7. a) $A^t=\begin{bmatrix}7 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}$

b) $B^t=\begin{bmatrix}6 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$

c) $C^t=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & -1\\ -9 & 5\end{bmatrix}$

d) $D^t = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $E^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 & 4,1 \end{pmatrix}$

f) $F^t = [5\ 7\ 1\ 0\ 3]$

g) $G^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

9. 3

10. principal: 1, 4 e 9

secundária: 3, 4 e 3

11. a) 1 485

b) 190

c) R$ 27 135,00

12. a) X e Y: 15 km

Z e X: 27 km

Y e Z: 46 km

b) $D^t = D$

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

15. a) $\frac{10}{3}$

b) integral; pão doce

c) ferro: 8,4 mg

fósforo: 357 mg

16. $a = 2, b = 1, c = 6$ e $d = 4$

17. $x = 4, y = 3$ e $z = 2$

18. a) Não existe $m \in \mathbb{R}$.

b) $m = -3$

19. $p = q = 3$

20. $m = 0, n = 2$ e $p = -2$

21. $a = -3, b = -2, c = -1, d = 0, e = 5$ e $f = 0$

22. a) A e C

b) 3

23. a) $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$ c) $(-5\ -1\ -8\ -3)$

b) $\begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

24. a) $\begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

25. a) 21 b) 30

26. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

27. a)

	P	M	B	H	F
Aluno A	3	3	0	5	5
Aluno B	1	1	3	4	2
Aluno C	8	5	5	4	5

b) C, C e A

28. a) Sim; Não.

b) Não existe $m \in \mathbb{R}$.

29. $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

30. a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

31. a) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

32. a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -25 \\ 10 & -5 & -11 \\ 15 & 12 & -9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & 8 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

35. $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

36. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

e $Y = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

37. a) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 \\ -10 & 9 & 6 & -19 \end{bmatrix}$

c) Não existe.

d) $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 0 & 17 \\ 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 18 & -6 & 24 \\ 30 & -10 & 40 \end{pmatrix}$

g) Não existe.

h) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 \\ 13 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

38. a) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Não existe. e) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

39. a) 3 b) 17 c) Não existe.

40. 22

41. $x = 2$ e $y = -4$

42. a) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 2 \\ 20 & 33 & 12 \\ 5 & 18 & 34 \end{pmatrix}$

43. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

44. $m = 3$

45. a) $\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 15x + 900 \end{pmatrix}$

b) 68

46. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -64 & 19 \end{pmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

A = 99 B = 91 C = 147

48. $x = \frac{15}{2}$ e $y = \frac{2}{5}$

49. $x = \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{4}$

50. a) bicarbonato: 23,8 kg; carbonato: 5 kg; ácido: 21,2 kg

b) $\begin{pmatrix} 2,3 & 2,5 \\ 0,5 & 0,5 \\ 2,2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

c) 9 500 envelopes na versão T e 5 500 envelopes na versão E.

51. a) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$

52. 1ª semana: R$ 31,28

2ª semana: R$ 29,85

53. sim

54. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

55. Não existe.

56. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

58. $x = 7$ e $y = 1$

59. a) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 38 & 0 \\ 0 & 38 \end{pmatrix}$

60. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -5 & -16 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$

Desafio

20 litros por minuto

Capítulo 7
Sistemas lineares

Exercícios

1. *a, c, f, h*

2. a) sim b) não c) sim

3. a) sim b) não c) não d) sim

4. −8

5. a) $6x + 15y = 99$

b) não

c) ($y = 1$ e $x = 14$) ou ($y = 3$ e $x = 9$) ou ($y = 5$ e $x = 4$)

6. $m = -\frac{15}{19}$

7. Entre outras, são soluções:

a) $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ ou $(-2, 1)$

b) $(0, 1, 1)$ ou $(1, 1, 2)$

c) $(0, 2)$ ou $(1, 1)$

d) $\left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$ ou $(2, 2, 2)$

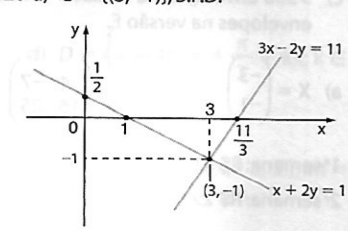
8. 8

9. a) 18 b) 10

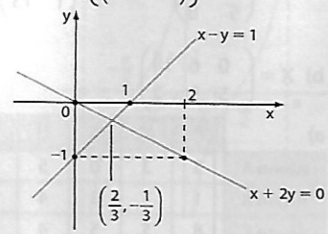
10. a) $-4x + 3y = -1$, por exemplo.

b) Resposta pessoal.

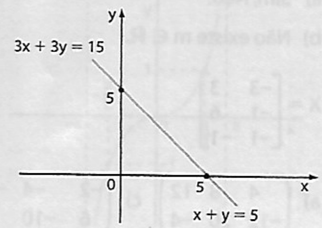
11. a) $S = \{(3, -1)\}$; S.P.D.



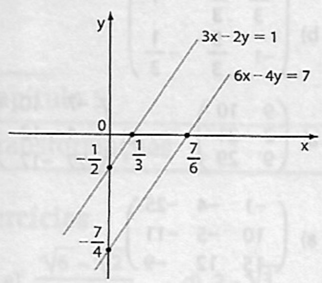
b) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; S.P.D.



c) $S = \{(x, 5 - x); x \in \mathbb{R}\}$ ou
$S = \{(5 - y, y); y \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.



d) $S = \varnothing$; S.I.



12. 34 motos; 45 carros

13. R$ 11,10

14. R$ 360,00

15. a) 51 pontos c) Não é possível.

b) 11 erros

16. $m \neq \frac{5}{2}$

17. 11

18. $m = n = -2$

19. sim

20. b

21. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

22. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

23. a) $m = 1$ b) $m = 3$ c) $m = 3$

24. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Verificação.

c) Verificação.

d) −25

25. *a, c* e *e* estão escalonados.

26. a) $S = \{(-3, 7)\}$; S.P.D.

b) $S = \{(3, 3, -4)\}$; S.P.D.

c) $S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

d) $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; S.P.D.

e) $S = \{(15, 8 + 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

f) $S = \varnothing$; S.I.

g) $S = \left\{\left(1 - \frac{b}{2} - \frac{d}{3}, b, \frac{d}{3}, d\right); b, d \in \mathbb{R}\right\}$

27. $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -6$

28. a) $x - y = 8$

b) Resposta pessoal.

c) $S = \{(8 + \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

29. $S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

30. a) $S = \{(1, 3, 2)\}$; S.P.D.

b) $S = \{(-11, -6, -3)\}$; S.P.D.

c) $S = \varnothing$; S.I.

d) $S = \left\{\left(\frac{-1 + \alpha}{2}, \frac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; S.P.I.

31. a) $S = \left\{\left(\frac{-7\alpha + 13}{11}, \frac{8 + 5\alpha}{11}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

b) $S = \{(5, -2, -1)\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{(1, 1, 1)\}$

32. quibe: R$ 1,50; esfirra: R$ 0,80; suco: R$ 2,00

33. 15 do médio; 20 do grande; 8 do super

34. 14 questões erradas

35. a) $S = \{(7, 3)\}$

b) $S = \{(5 - \alpha, 2, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \{(1, 5)\}$

f) $S = \{(-1, 2, 3, 1)\}$

36. a)