

Consequência Lógica

Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas?

Resposta:

No caso da lógica proposicional clássica, a resposta é dada em termos de valorações **(Linhas da Tabela Verdade)**

Definição 1:

Dizemos que uma fórmula ***B é consequência lógica de outra fórmula A***, se quando a fórmula ***A tiver valor de verdade V*** a fórmula ***B também possui o valor de verdade V***.

Representação:

$$A \models B.$$

Exemplo : Verifique se $(p \vee q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução: Vide *linhas 1, 3, 5, 7 e 8*.

linha	p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	V	V	V
4	V	F	F	V	F	F
5	F	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	F	V	V
8	F	F	F	F	V	V

Exemplo : Verifique se $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução: Pela *linha 4 não é verdade que* $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$

linha	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	F	V	V
6	F	V	F	F	V	V
7	F	F	V	F	V	V
8	F	F	F	F	V	V

Além da consequência lógica entre duas fórmulas, podemos estudar **quando uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ** (Γ também pode ser chamado de teoria).

Uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ , representado por $\Gamma \vDash A$, se *quando todas as fórmulas de Γ tiverem valor V a fórmula A também possui valor V .*

Se $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, no lugar de $\Gamma \vDash A$, é usual representarmos por

$$\alpha, \beta, \gamma, \theta \vDash A.$$

Note que se $\Gamma = \emptyset$ representamos $\Gamma \vDash A$ por $\vDash A$.

Neste caso, $\vDash A$ significa que A é uma tautologia ou uma fórmula válida.

Exemplo 4: Verificar a validade da regra lógica conhecida como *modus ponens* : $p, p \rightarrow q \vdash q$.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A única linha em que simultaneamente p e $p \rightarrow q$ possuem **valor V** é a primeira, e neste caso temos também que q possui **valor V**.

Qual a relação entre a consequência lógica (\vdash) e o conectivo booleano (\rightarrow) ?

Teorema da Dedução

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas.
Então,

$\Gamma, A \vdash B$ se, e somente se, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Assim,

$$A \equiv B \text{ se } A \models B \text{ e } B \models A.$$

De fato,

$A \models B$ implica $\models A \rightarrow B$, isto é, $A \rightarrow B$ é tautologia,
 $B \models A$ implica $\models B \rightarrow A$, isto é, $B \rightarrow A$ é tautologia.
Logo, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ é uma tautologia.

Lembre que, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv A \leftrightarrow B$ e daí, $A \equiv B$.