Conjuntos, Relações e Funções

Introdução a Teoria de Conjuntos

Uma coleção de objetos, objetos agrupados, uma reunião de objetos,esta é a idéia intuitiva de conjuntos. Note que não há uma definição para conjunto, ou seja, “conjunto” é o que chamamos de conceito primitivo. Os objetos que são reunidos em um conjunto são chamados de elementos deste conjunto.

Assim, se A é um conjunto e b é um elemento de A, denotamos (escrevemos) da seguinte maneira:

$$b \in A.$$

Assim, se b não é elemento de A, escrevemos

$$b \notin A.$$

Exemplo 1:

(a) Se Q é o conjunto de todos os quadrados e A é um paralelogramo, então $A \in Q$. Se C é um círculo, então $C \notin Q$.

(b) Se G é o conjunto de todos os números pares, então $16 \in G$, $3 \in G$, $5 \notin G$.

(c) Se L é o conjunto de todas as soluções da equação $x^2=1$, então $2 \notin L$, $1 \in L$, $-1 \in L$.

De um modo geral há dois modos de escrevermos um conjunto:

1. Listando os elementos entre chaves e separando eles por vírgulas, por ex.:

$$\{a, b\}, \{x, y, z, w\}, \{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3\}.$$

Se o número de elementos for grande normalmente utilizamos de reticiências:

$$\{1,2,3,4,..., 900\}, \{1,2,3,4,5,...\}.$$

2. A partir de um a propriedade que determina se um elmento pertence ou não ao conjunto:

$\{x$: x é um número natural$\}$, $\{x$: x é um número natural e $x>4\}$, $\{p$: p é um número primo$\}$.

De modo geral escrevemos: {x: P(x)}, sendo P(x) a propriedade satisfeita por x, comumente também chamado de predicado.

RIGOR!! Se R={x:x∉x}, então R∈R ou R∉R ? Vejamos.

Se R∈R então R∉R.

Se R∉R então R∈R.

O conjunto R é chamado de conjunto de Russel em alusão a Bertrand Russel (filósofo, matemático, pacifista, cientista,...). Assim, devemos ter cuidado na descrição de conjuntos, os elementos fazem parte de que universo? Onde podemos tomá-los? (paradoxos...)

De modo geral, denotamos conjuntos do seguinte modo:

{x∈M : P(x)}

Usaremos as seguintes convenções para descrever certos conjuntos, a saber:

N={0,1,2,3,4,...} conjunto de todos os números naturais.

N_+={1,2,3,4,...} conjuntos dos números naturais sem o zero.

Z={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} conjunto dos números inteiros.

Q= $\left\{x : x = \frac{a}{b}\ , a\epsilon Z, b\epsilon Z\ e\ b \neq 0\right\}$ conjunto dos números racionais

R denotará o conjunto dos números reais.

Conjuntos, subconjuntos e conjunto das partes (conjunto potência)

Definição 1: Um conjunto A é um subconjunto de B, denotado por A⊆B, se qualquer elemento de A é também um elemento de B. A relação ⊆ é chamada de relação de inclusão.

Assim, A⊆B significa dizer que se x∈A, então x∈B.

CUIDADO!!! Não confunda as relações ∈ e ⊆.

Se B={1, 2, 3}, então 1 é elemento de b (1∈B), mas 1 não é subconjunto de B (1⊄B). Agora o conjunto A={1} é um subconjunto de B, isto é, A⊆B.

É importante sabermos distinguir objetos, a saber, 1 é diferente de {1}, {1} é diferente de {{1}}.

O conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e será denotado por $\varnothing$. Assim, $\varnothing=\{x: x\neq x\}$.

Vejamos algumas propriedades da relação $\subseteq$.

Lema 1: $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto, isto é, $\varnothing\subseteq A$, para qualquer conjunto A.

Demonstração:

De fato, se existir um conjunto A tal que $\varnothing\not\subset A$, então deve existir um elemento do conjunto vazio que não está no conjunto A, o que é impossível. Logo, $\varnothing\subseteq A$ para qualquer conjunto A. ♦

Lema 2: Para qualquer conjunto A, $A\subseteq A$.

Demostração:

Segue diretamente da definição de $\subseteq$. ♦

Lema 3: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Se $A\subseteq B$ e $B\subseteq C$, então $A\subseteq C$.

Demonstração:

Seja $x\in A$ um elemento qualquer, então $x\in B$ (pois $A\subseteq B$). Agora, como $B\subseteq C$, então $x\in C$. Logo, se $x\in A$ então $x\in C$. Portanto, $A\subseteq C$. ♦

A próxima definição nos permite construir um novo conjunto a partir de um conjunto dado.

Definição 2: Se A é um conjunto, então $P(A)=\{X : X\subseteq A\}$ é chamado de conjunto das partes de A.

Assim, P(A) é o conjunto de todos os subconjuntos de A. Alguns leitores também denotam P(A) como o conjunto potência de A.

Exemplo 2:

1. Se $A=\{a\}$ então $P(A)=\{ \varnothing, \{a\} \}$.
2. Se $A=\{a, b\}$ então $P(A) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$.
3. Se $A=\{a, b, c\}$ então $P(A) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$.
4. $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ (Lembre que $\varnothing$ é diferente $\{\varnothing\}$).

Note que, se A possui zero elemento (A é o conjunto vazio), P(A) possui 1 elemento (2^0 elementos); se A possui um elemento, P(A) possui 2 elementos (2^1 elementos); se A possui dois elementos, P(A) possui 4 elementos (2^2 elementos); se A possui três elementos, P(A) possui 8 elementos (2^3 elementos). Agora, se A possui n elementos, quantos elementos possui P(A)? Vejamos.

Seja $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, então um subconjunto B de A pode ser escrito do seguinte modo:

$$B=\{ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$

Se $a_i \in B$ denotamos $b_i = 1$ e se $a_i \notin B$ denotamos $b_i = 0$. Assim, $B=\{ 0 , 0 , 0 , \ldots, 0\}$ significa dizer que $B=\emptyset$. Se $B=\{1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$ então $B=\{ a_1, a_5 \}$, se $B=\{1, 1, \ldots, 1\}$ então B=A. Como para cada elemento b_i temos duas possibilidades 0 ou 1 e temos n elementos em B, então o número de conjuntos do tipo B é 2^n.

A próxima definição nos diz quando dois conjuntos são ditos iguais, isto é , possuem os mesmos elementos.

Definição 3: Dois conjuntos A e B são iguais se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Denotamos por A=B.

Assim, para demonstrarmos que A e B são conjuntos iguais devemos mostrar que A é subconjunto de B e que B é subconjunto de A.

Exemplo 3: Mostre que $S=\{x \in R : x^2=1\}$ e $B=\{-1, 1\}$ são iguais.

Conjuntos finitos e infinitos

Definição 4: Um conjunto M é finito se $M=\emptyset$ ou se existe um número natural n tal que os elementos de M podem ser numerados 1, 2, 3,...,n de tal modo que qualquer elemento de M aparece exatamente na lista. Caso contrário M é um conjunto infinito.

Exemplo 4:

1. O conjunto {a, b, c, d} é finito, uma possivel numeração para este conjunto é:

1 para a, 2 para b, 3 para c, 4 para d (é claro que existe outras possibilidades pra listarmos o conjunto).

2. O conjunto das soluções da equação $x^2+23x-17=0$ é finito.
3. Os conjuntos N, Z, Q, R são infinitos.
4. O conjunto de todos os múltiplos de 5 é infinito.

Inúmeros são os casos em que não sabemos determinar se um conjunto é finito ou infinito. Um dos problemas famosos de matemática foi o chamado Teorema de Fermat, a saber, para quais números naturais n existem números naturais positivos a, b, c tais que $a^n+b^n=c^n$. Se n é igual a 2 nós obtemos a equação pitagórica e por exemplo, a=3, b=4 e c=5 é uma solução. Andrey Wiley recentemente mostrou que 2 é o único inteiro para os quais os números a, b e c existem.

Outro problema relativo a conjunto finito ou infinito recai sobre pares de números primos, mais precisamente, um par de números primos p e q é chamado de par de *twin pair* se p+2=q, isto é, eles são números ímpares consecutivos. Por exemplo, (5, 7), (11, 13), (59, 61). Não sabemos se existem infinitos pares de números primos deste tipo.

Teorema 1: Há infinitos números primos.

Demonstração:

Seguindo a prova de Euclides, mostramos que para qualquer número primo p existe um número primo q maior que p. De fato, se p é o maior número primo, seja q=1x2x3x...xp. Então q+1 não é divisível por 2, 3, 4, 5,..., p. Daí, q+1 é divisível por 1 e ele mesmo. É claro que q+1 é maior que p, o que contraria a hipótese de que p é o maior número primo. Logo não existe o maior número primo, ou seja, há infinitos números primos. ♦

Operações entre conjuntos

Nesta seção vamos mostrar como obtermos conjuntos a partir de outros conjuntos.

Definição 5: Sejam A e B conjuntos, então:

1. A interseção de A e B, denotada por $A\cap B$ é definida como

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ e } x\in B\}.$$

2. A união de A e B, denotada por $A\cup B$ é definida como

$$A\cup B=\{x : x\in A \text{ ou } x\in B\}.$$

3. O conjunto diferença de A e B, denotado por $A-B$ é definido como

$$A-B=\{ x : x\in A \text{ e } x\notin B\}.$$

Observações:

Se $A\cap B=\emptyset$ dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

Alguns autores denotam $A-B$ por A/B. A/B é chamado o complemento B com relação a A.

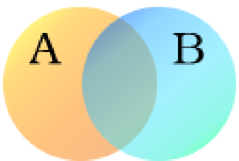
Se U é o conjunto universo, U/A é o complemento de A, denotado por $-A$.

A∪B é o conjunto dos elementos que estão em A ou B ou ambos, isto é, o “ou” não é exclusivo.

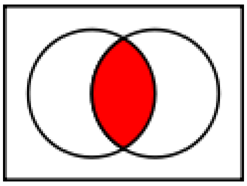
Lema 4: Seja A⊆U, sendo U o conjunto Universo, Então:

1. A∩A=A, A∪A=A.
2. A∩∅=∅, A∪∅=A.
3. A∩U=A, A∪U=U.
4. A∩–A=∅, A∪–A=U.♦

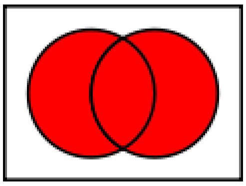
Uma representação para as operações definidas sobre conjuntos é dada por diagramas de Venn.



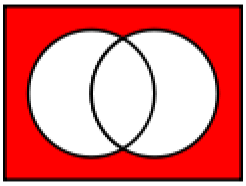
A∩B



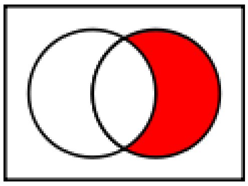
A∪B



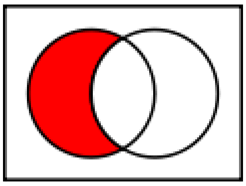
U–(A∪B)



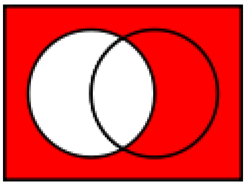
B–A



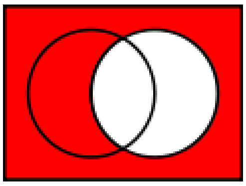
A–B

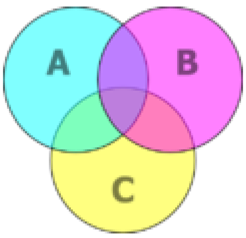


–A

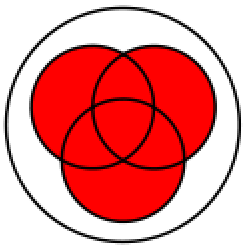


–B

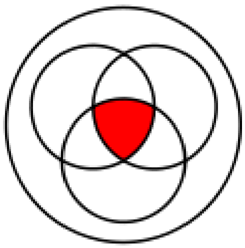




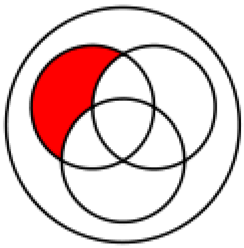
A∪B∪C



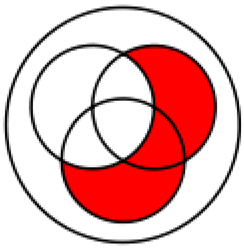
A∩B∩C



A–(B∪C)



(B∪C)–A



Lema 5: Sejam A, B e C conjuntos.

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. (Comutatividade)
2. $(A \cap B) \cap = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Associatividade). ♦

Distributividade, Leis de De Morgan e Tabelas

Considerando U como o conjunto universo, veremos no próximo teorema uma relação entre os operadores $\cup$, $\cap$ e $-$.

Lema 6 (Regras de De Morgan): Sejam A, B e C conjuntos.

1. $-(A \cup B) = -A \cap -B$.
2. $-(A \cap B) = -A \cup -B$.

Demonstração:

Prova de (1).

$$x \in -(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in -A \text{ e } x \in -B \Leftrightarrow x \in -A \cap -B$$

Portanto, $-(A \cup B) = -A \cap -B$.

Prova de (2) deixamos como exercício. ♦

Note que se A e B são conjuntos, então para um elemento x qualquer de U segue quatro possibilidades:

$\mathbf{x \in A}$ **e** $\mathbf{x \in B}$; $x \in A$ e $x \notin B$**;** $\mathbf{x \notin A}$ **e** $\mathbf{x \in B}$; $x \notin A$ e $x \notin B$.

Assim, se “1” significa que x pertence ao conjunto que esta na coluna onde o 1 aparece e se “0” significa que x não pertence a este referido conjunto, entõa podemos montar tabelas para as operações $\cup$, $\cap$, $-$. Vejamos.

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

A	$-A$
1	0
0	1

Temos abaixo a demonstração de uma das regras de De Morgan via tabelas.

A	B	$-A$	$-B$	$A\cup B$	**$-(A\cup B)$**	**$-A\cap -B$**
1	1	0	0	1	**0**	**0**
1	0	0	1	1	**0**	**0**
0	1	1	0	1	**0**	**0**
0	0	1	1	0	**1**	**1**

Observe que as duas últimas colunas tem as mesmas entradas nos correspondentes lugares, isto prova que os referidos conjuntos são iguais.

Teorema 2: Para quaisquer conjuntos A e B segue que:

$A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$ *Leis da Absorção*. ♦

Para finalizar a seção segue resultado que revela ação recíproca enter os operadores $\cup$ e $\cap$.

Teorema 3: Para quaisquer conjuntos A, B e C temos:

$A \cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$, $A \cap (B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$ *Leis distributivas*. ♦