2º modo:

Vamos usar as propriedades de adição de matrizes:

$$X - A + B = C \Rightarrow X - A + B + (-B) = C + (-B) \Rightarrow X - A = C - B \Rightarrow X - A + A = C - B + A \Rightarrow \boxed{X = C - B + A}$$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pense nisto: Use propriedades da adição de matrizes para obter outra solução para o exercício resolvido 3.

Exercícios

23. Calcule:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

24. Sejam $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Determine as matrizes:

a) $A + B + C$

b) $A - B + C$

c) $A - (B + C)$

25. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja $C = A + B$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Determine os elementos:

a) c_{78}

b) $c_{10\,12}$

26. Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

27. As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

Março	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Abril	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual matriz representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

28. Uma matriz quadrada A é dita antissimétrica quando $A = -A^t$.

a) A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica? E a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

b) Existe algum valor real de *m* para o qual a matriz $\begin{bmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ é antissimétrica? Determine-o, se existir.

29. Determine a matriz X, tal que $(X + A)^t = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Definição

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real. O produto de k pela matriz A (indica-se: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Isso significa que B é obtida de A multiplicando-se por k cada um dos elementos de A.

Observe os casos a seguir:

- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, então $\frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$, então $(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades

Sejam k e ℓ números reais e A e B matrizes do mesmo tipo. Valem as seguintes propriedades:

I. $k \cdot (\ell \cdot A) = (k \cdot \ell) \cdot A$

II. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

III. $(k + \ell) \cdot A = k \cdot A + \ell \cdot A$

IV. $1 \cdot A = A$

A título de exemplo, façamos a prova da propriedade II. As demais são análogas.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e sendo $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$k \cdot (A + B) = C = (c_{ij})_{m \times n};\ k \cdot A = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ e } k \cdot B = E = (e_{ij})_{m \times n}$$

Vamos mostrar que $C = D + E$.

Para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos que:

$$c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para números reais, vem:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = d_{ij} + e_{ij}$$

Daí, podemos concluir que $C = D + E$, isto é: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

Exercícios

30. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $4 \cdot A$ b) $\frac{1}{3} \cdot A$ c) $-2 \cdot A$

31. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

a) $3A + B$ b) $A - 3B$

32. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = 2i - 3j$. Determine as matrizes:

a) $3A + 4B$ b) $2A^t - B^t$

33. Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

34. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

35. Determine a matriz X que satisfaz a equação:

$$2 \cdot X^t + A = B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

36. Resolva o sistema $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 17 & -13 & 20 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -6 \\ 29 & -20 & 33 \end{pmatrix} \end{cases}$

Multiplicação de matrizes

Introdução

A tabela abaixo representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos alunos X, Y e Z, em cada bimestre do ano letivo.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Aluno X	7	8	6	8
Aluno Y	4	5	5	7
Aluno Z	8	7	9	10

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(1^{\underline{o}}\,\text{bim.} \times 1) + (2^{\underline{o}}\,\text{bim.} \times 2) + (3^{\underline{o}}\,\text{bim.} \times 3) + (4^{\underline{o}}\,\text{bim.} \times 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

que equivale a fazer:

$$(1^{\underline{o}}\ \text{bim.} \times 0{,}1) + (2^{\underline{o}}\ \text{bim.} \times 0{,}2) + (3^{\underline{o}}\ \text{bim.} \times 0{,}3) + (4^{\underline{o}}\ \text{bim.} \times 0{,}4)$$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular as médias dos alunos:

- aluno X: $(7 \times 0{,}1) + (8 \times 0{,}2) + (6 \times 0{,}3) + (8 \times 0{,}4) = 7{,}3$
- aluno Y: $(4 \times 0{,}1) + (5 \times 0{,}2) + (5 \times 0{,}3) + (7 \times 0{,}4) = 5{,}7$
- aluno Z: $(8 \times 0{,}1) + (7 \times 0{,}2) + (9 \times 0{,}3) + (10 \times 0{,}4) = 8{,}9$

Essas médias podem ser registradas em uma matriz C, que é o produto da matriz A (notas) pela matriz B (pesos):

$$C = \begin{bmatrix} 7{,}3 \\ 5{,}7 \\ 8{,}9 \end{bmatrix}$$

A ideia utilizada para obter a matriz C será usada agora para definirmos matematicamente a multiplicação de matrizes.

Definição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Acompanhe o procedimento que devemos seguir para obtermos o elemento c_{ik} da matriz C:

1º) Tomamos ordenadamente os *n* elementos da linha *i* da matriz A: $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. (1)

2º) Tomamos ordenadamente os *n* elementos da coluna *k* da matriz B: $b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}$. (2)

3º) Multiplicamos o 1º elemento de (1) pelo 1º elemento de (2), o 2º elemento de (1) pelo 2º elemento de (2), e assim sucessivamente.

4º) Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Observações

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \underbrace{n) \cdot B_{(n}}_{\text{garante a existência do produto}} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

Exemplo 1

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, AB e BA.

- Como A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×2, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2.

Escrevendo os elementos de C em sua forma genérica, temos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

Da definição, vem:

- c_{11} (linha 1 de A e coluna 1 de B): $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \end{array}$$

- c_{12} (linha 1 de A e coluna 2 de B): $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -2 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

- c_{21} (linha 2 de A e coluna 1 de B): $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \end{array}$$

- c_{22} (linha 2 de A e coluna 2 de B): $c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}$$

Assim, $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como B é do tipo 3×2 e A é do tipo 2×3, segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 3×3.

Assim, $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando a definição, vem:

- d_{11} (linha 1 de B e coluna 1 de A): $d_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 4$

$$\begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

- d_{12} (linha 1 de B e coluna 2 de A): $d_{12} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 3$

$$\begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

- d_{13} (linha 1 de B e coluna 3 de A): $d_{13} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -3$

$$\begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- d_{21} (linha 2 de B e coluna 1 de A): $d_{21} = 0 \cdot 2 + 5\,(-1) = -5$

$$\begin{matrix} 0 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

- d_{22} (linha 2 de B e coluna 2 de A): $d_{22} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 0$

$$\begin{matrix} 0 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

- d_{23} (linha 2 de B e coluna 3 de A): $d_{23} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 10$

$$\begin{matrix} 0 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- d_{31} (linha 3 de B e coluna 1 de A): $d_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$

$$\begin{matrix} 4 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

- d_{32} (linha 3 de B e coluna 2 de A): $d_{32} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 12$

$$\begin{matrix} 4 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

- d_{33} (linha 3 de B e coluna 3 de A): $d_{33} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$

$$\begin{matrix} 4 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe, neste exemplo, que $C = A \cdot B$ é uma matriz 2×2 e $D = B \cdot A$ é uma matriz 3×3.

Exemplo 2

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Como A é do tipo 2×2 e B também, concluímos que existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pois:

$A_{2 \times \underline{2}} \cdot B_{\underline{2} \times 2} \Rightarrow A \cdot B$ é do tipo 2×2

$B_{2 \times \underline{2}} \cdot A_{\underline{2} \times 2} \Rightarrow B \cdot A$ é do tipo 2×2

Temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $c_{12} = (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 7$

$c_{21} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 5$ $\qquad$ $c_{22} = 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 10$

Daí, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$d_{11} = 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -1$ $\qquad$ $d_{12} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13$

$d_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$ $\qquad$ $d_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$

Daí, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -13 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Observe, neste exemplo, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Pense nisto: É sempre possível multiplicar duas matrizes quadradas de mesma ordem? O que se pode afirmar em relação ao tipo da matriz produto?

Exercícios

37. Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

38. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Determine, se existir:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot C$

d) $B^t \cdot C$

e) $B \cdot A^t$

Exercícios resolvidos

5. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = j + k$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6 \times 8}$, qual é o valor do elemento c_{35}?

Solução:

O elemento c_{35} da matriz produto C será obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha 3 de A e os da coluna 5 de B.

Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de A e B para determinar apenas as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}_{6 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} \ldots & b_{15} & \ldots \\ \ldots & b_{25} & \ldots \\ \ldots & b_{35} & \ldots \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{pmatrix} \ldots & 6 & \ldots \\ \ldots & 7 & \ldots \\ \ldots & 8 & \ldots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 19$.

6. Resolver a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz X.

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2 \times 2) & & (n \times p) & & (2 \times 1) \end{array}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de X é igual ao número de colunas de B.

Assim, $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Daí, $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efetuando a multiplicação, obtemos: $\begin{pmatrix} 5r + 7s \\ 2r + 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde resulta o sistema $\begin{cases} 5r + 7s = 4 \\ 2r + 3s = 1 \end{cases}$, cuja solução é $r = 5$ e $s = -3$.

Assim, $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Matriz identidade

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por I_n) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.

Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Vamos observar, por meio de exemplos, algumas propriedades relativas à multiplicação de matrizes envolvendo a matriz identidade.

I. A é uma matriz quadrada de ordem n.

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

- Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Temos que $B \cdot I_3 = B$ e $I_3 \cdot B = B$ (verifique).

II. A não é uma matriz quadrada, isto é, $A_{m \times n}$, com $m \neq n$:

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$. Temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ (Note que não existe } A \cdot I_2\text{.)}$$

$$A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ (Note que não existe } I_3 \cdot A\text{.)}$$

- Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

$$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Note que não existe } B \cdot I_3\text{.)}$$

$$B \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Note que não existe } I_2 \cdot B\text{.)}$$

Em geral, pode-se dizer que:

- Se A é quadrada de ordem n, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \neq n$, $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo que as matrizes A, B e C sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Observe nos exemplos a seguir a validade das propriedades I e II e valide em seu caderno a propriedade III, conforme indicação adiante.

- Propriedade I: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

- Propriedade II: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix}; B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix}$$, que coincide com (*).

- Propriedade III: Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e verifique que $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

Ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, é importante observar que:

> A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; vamos determinar AB e BA.

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Existem casos em que apenas uma das multiplicações pode ser feita. Por exemplo, se A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×4, então:

$\exists\, (A \cdot B)$ e é do tipo 2×4

$\nexists\, (B \cdot A)$ (nº de colunas de B é 4; nº de linhas de A é 2)