O TRATAMENTO ALGÉBRICO

$$\vec{u} = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$$

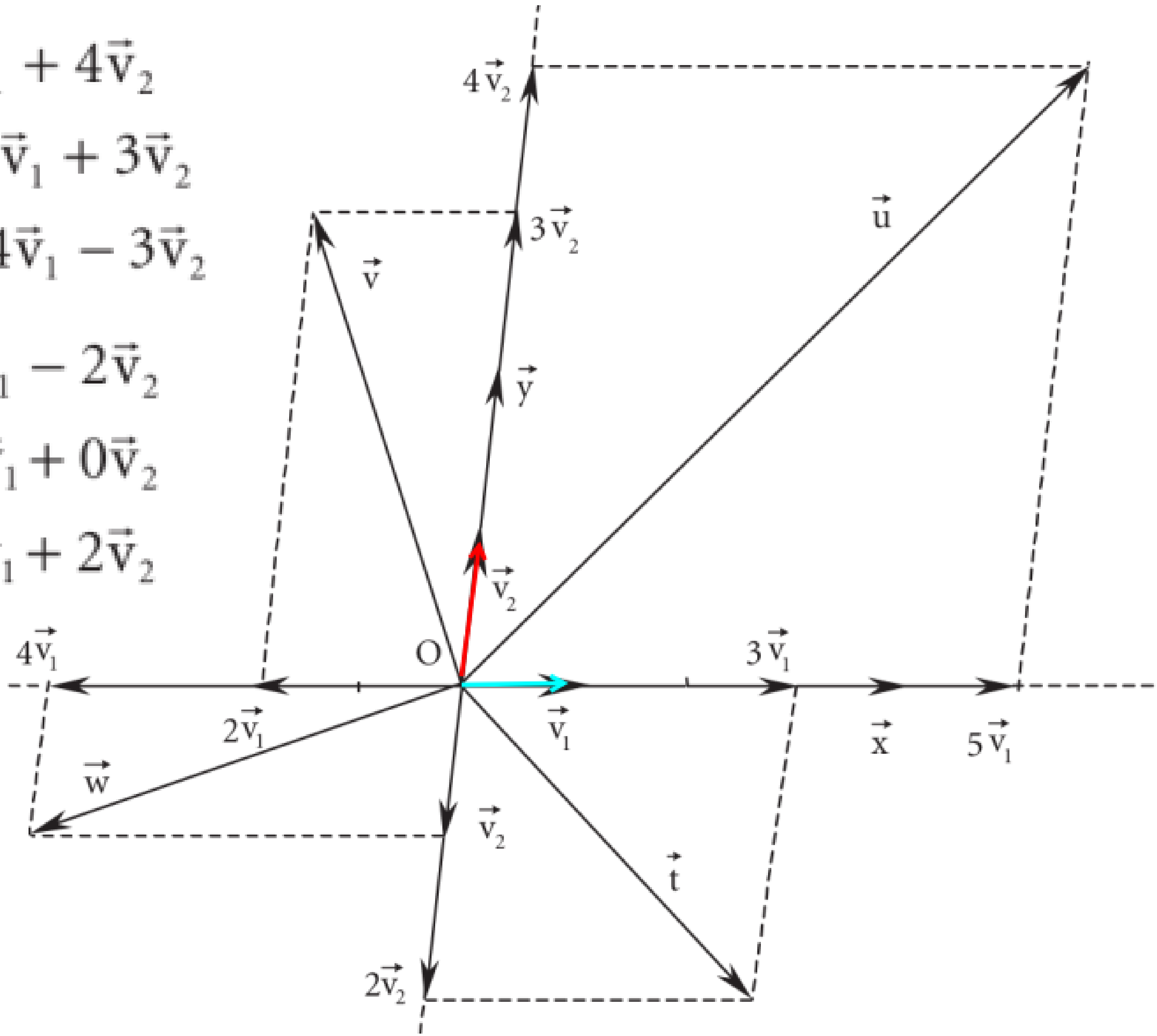
$$\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = -4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$$

$$\vec{t} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

$$\vec{x} = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$$

$$\vec{y} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$



De modo geral, dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\boxed{\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2} \quad \textbf{(1)}$$

Quando o vetor $\vec{v}$ é expresso como em **(1)**, diz-se que $\vec{v}$ é *combinação linear* de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado *base no plano*.

Os números a_1 e a_2 da igualdade **(1)** são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{v}$ na base B (a_1 é a primeira componente, e a_2, a segunda).

O vetor $\vec{v}$ da igualdade **(1)** pode ser representado também por $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja, se $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

Entre as infinitas bases ortonormais no plano, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que *determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal* xOy. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ambos com origem em O e extremidades em (1, 0) e (0, 1), respectivamente (Figura 1.40), sendo a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ chamada *canônica*. Portanto, $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

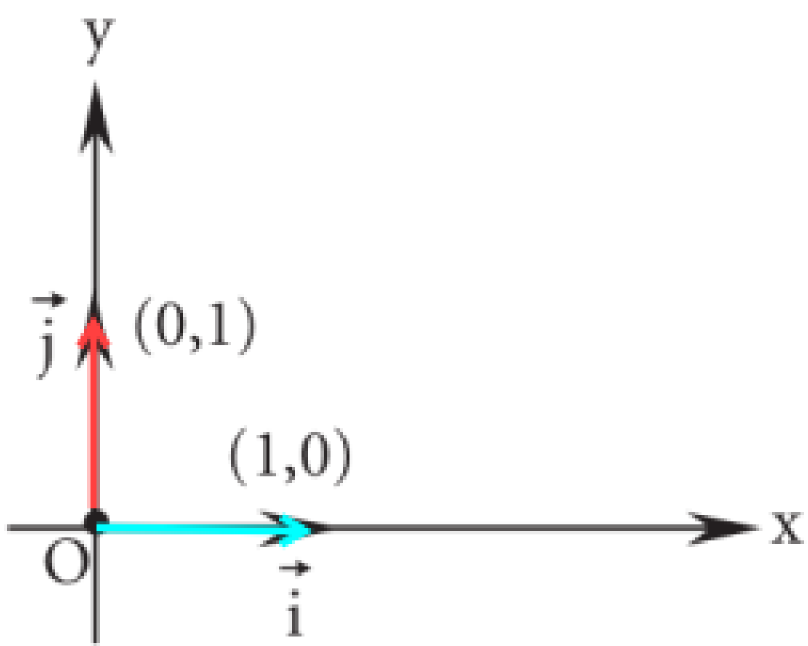


Figura 1.40

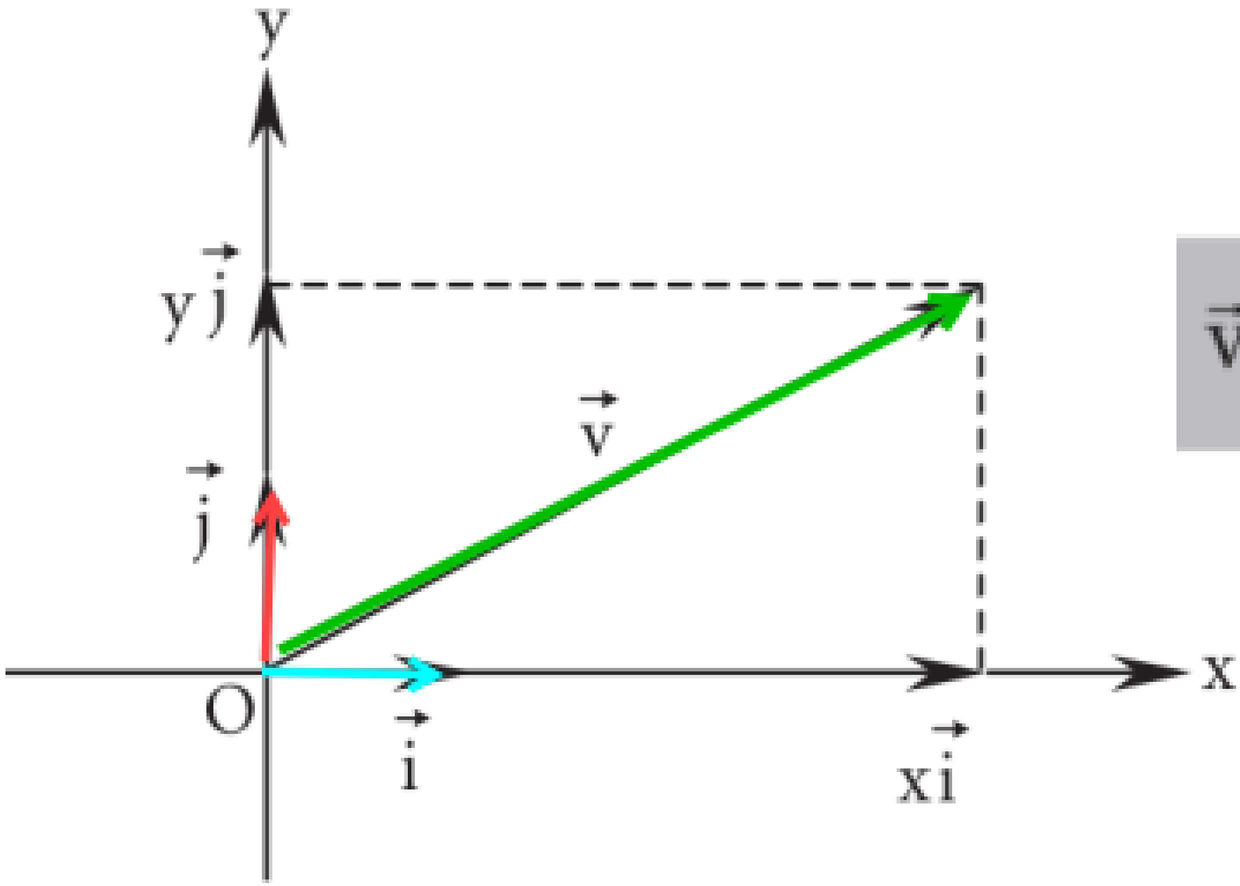


Figura 1.41

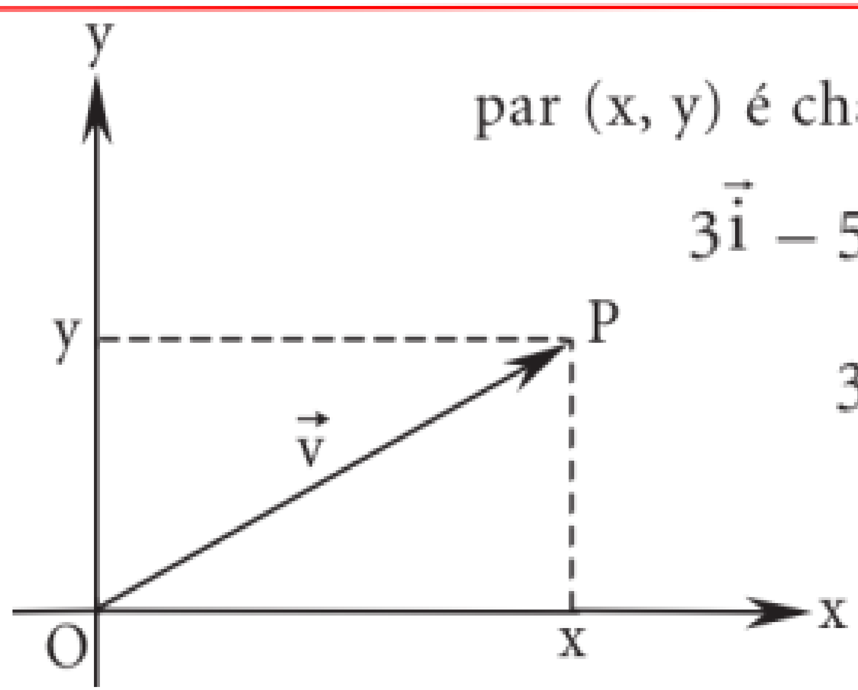
$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{v} = (x\,,\,y)$$

x e y são as *componentes de* $\vec{v}$ *na base canônica.*

Vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais.

A escolha proposital da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ deve-se exclusivamente à simplificação. A cada ponto P(x, y) do plano xOy corresponde o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Figura 1.42). Quer dizer que as coordenadas do ponto extremo P são as próprias componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica. Em geral, deixa-se de indicar nos eixos os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ como se vê na figura.



par (x, y) é chamado *expressão analítica* de $\vec{v}$

$$3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5) \qquad -4\vec{i} = (-4, 0)$$

$$3\vec{j} = (0, 3) \qquad \vec{0} = (0, 0)$$

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se,

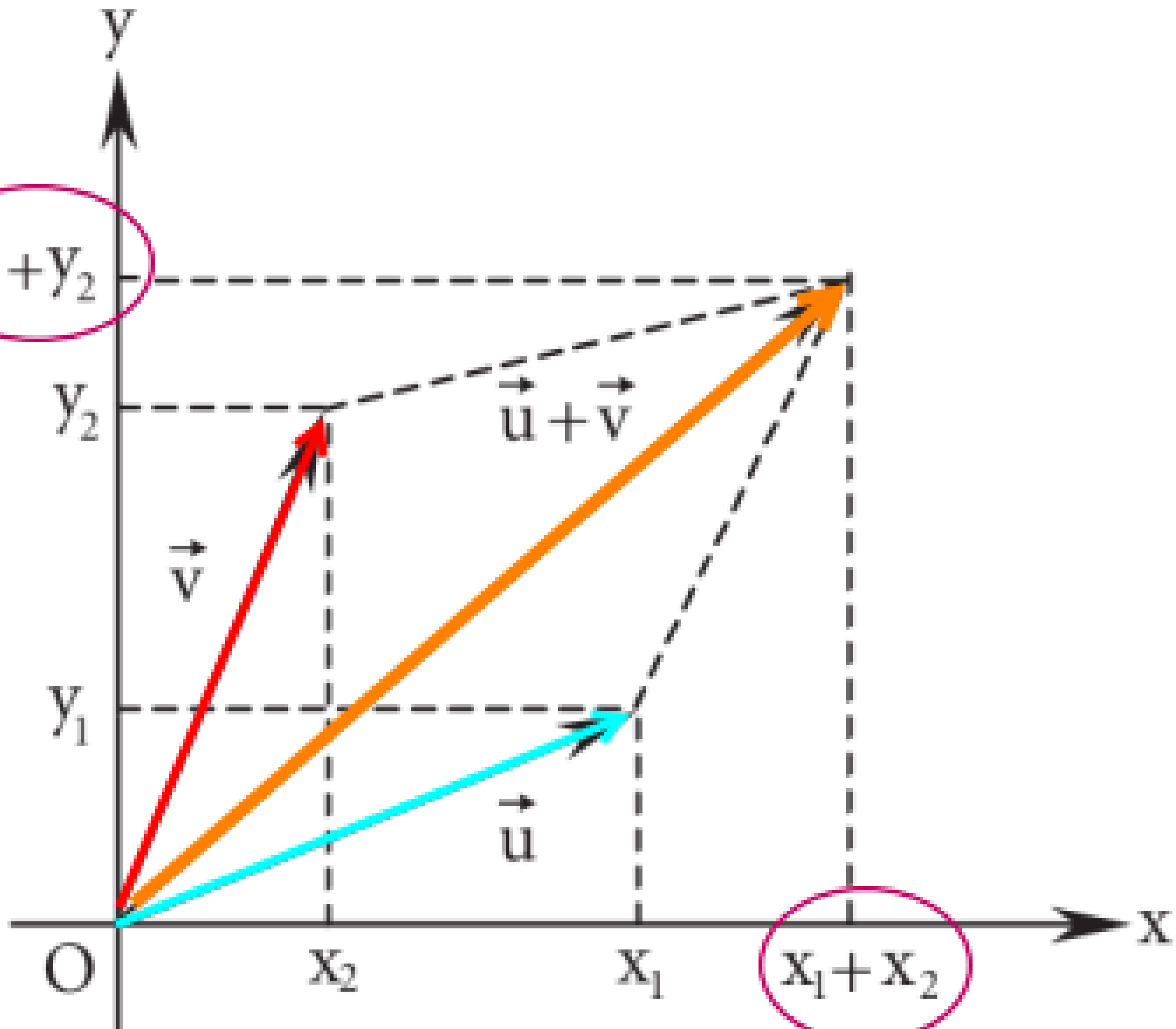
$$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

Operações com vetores

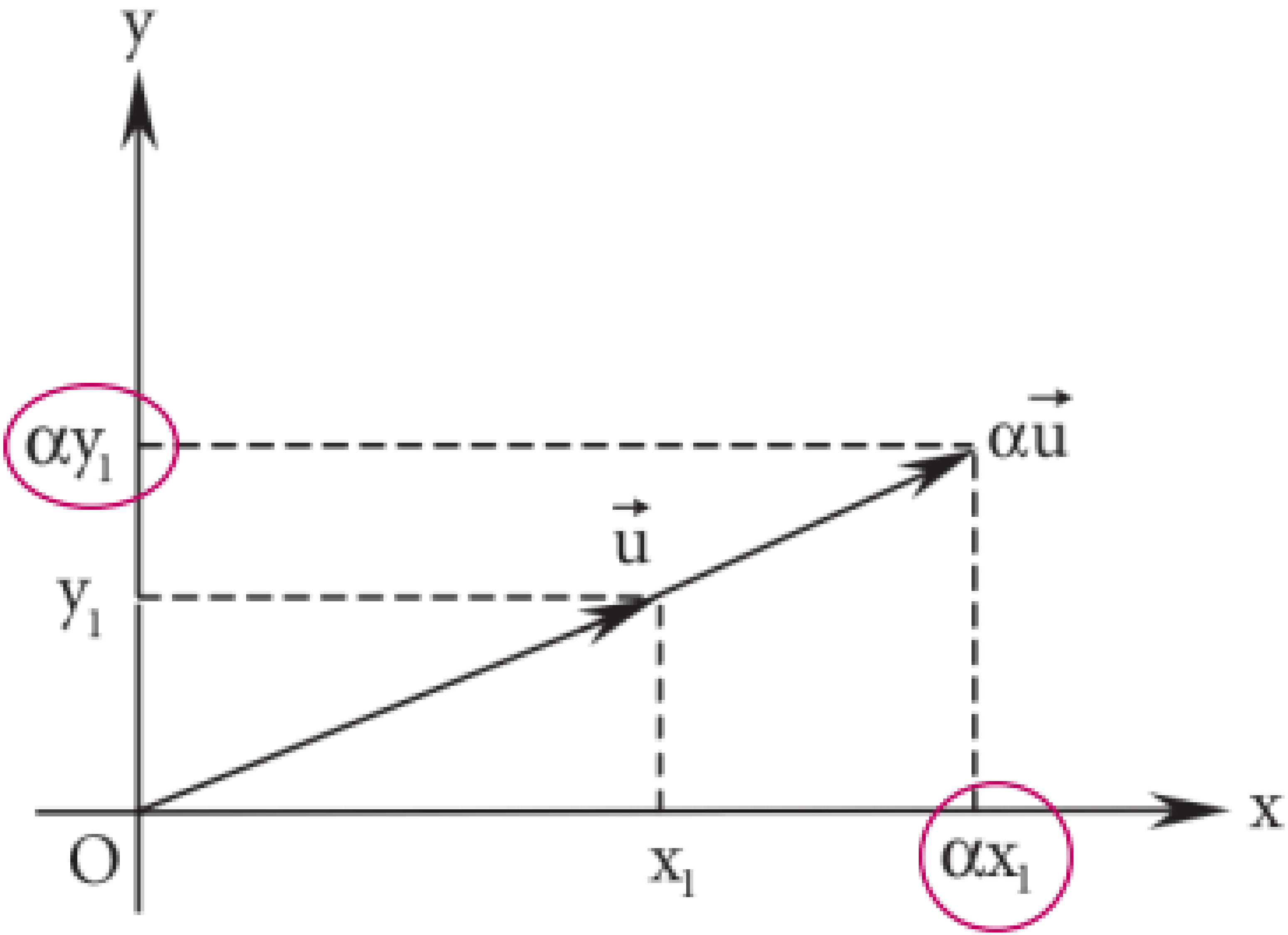
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$



$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(x_1,\ y_1)+(-x_2,-y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$$



$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = (-x_1, -y_1)$$

propriedades:

a) para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais α e β, tem-se

$\alpha(\beta\vec{v})\ r = (\alpha\beta)\vec{v}$

$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

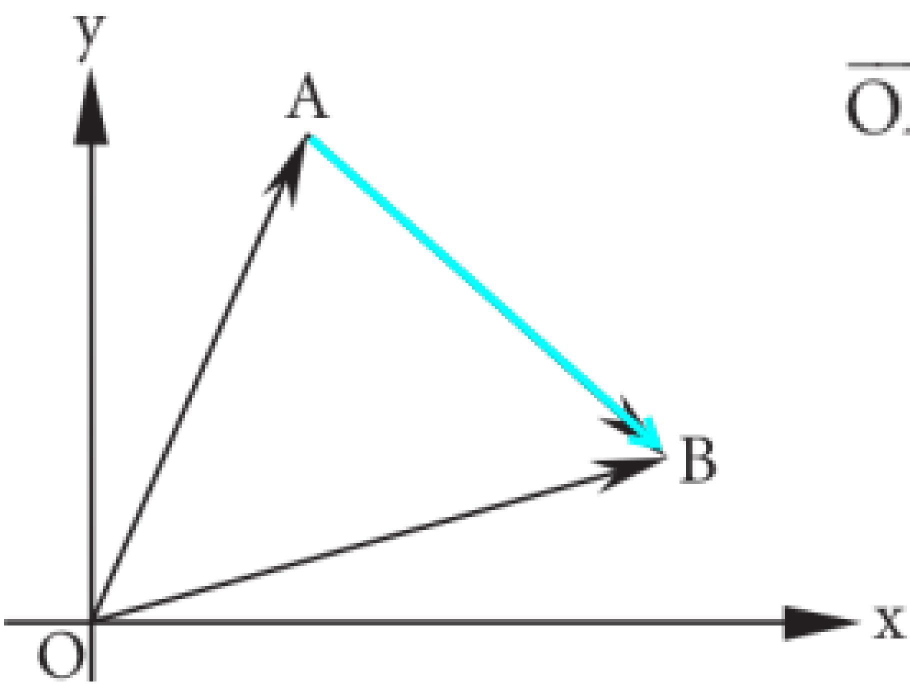
$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$1\vec{v} = \vec{v}$

Sugerimos, como exercício ao leitor, demonstrar essas propriedades.

Vetor definido por dois pontos

vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$



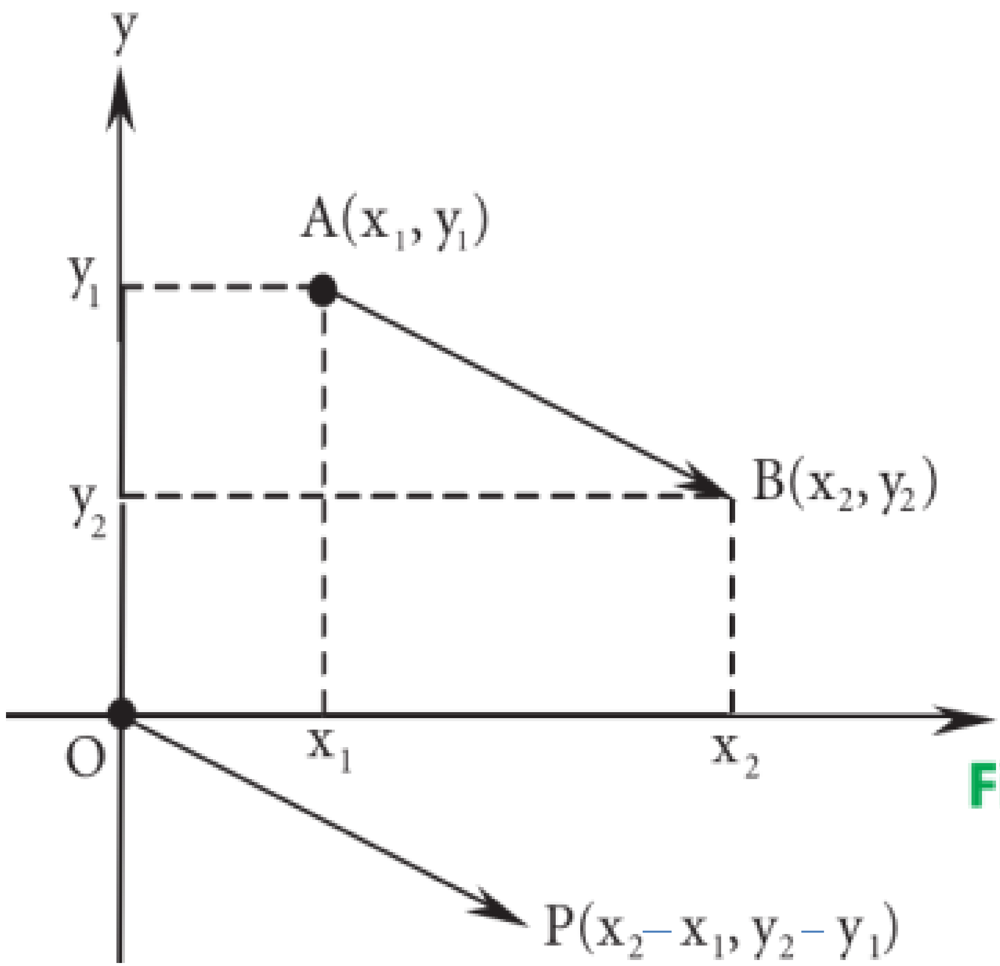
$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) \text{ e } \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2).$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Figura 1.45

vetor $\overrightarrow{AB}$, o que "melhor o caracteriza"

$P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (Figura 1.45).

$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é também chamado de *vetor posição* ou *representante natural* de $\overrightarrow{AB}$.

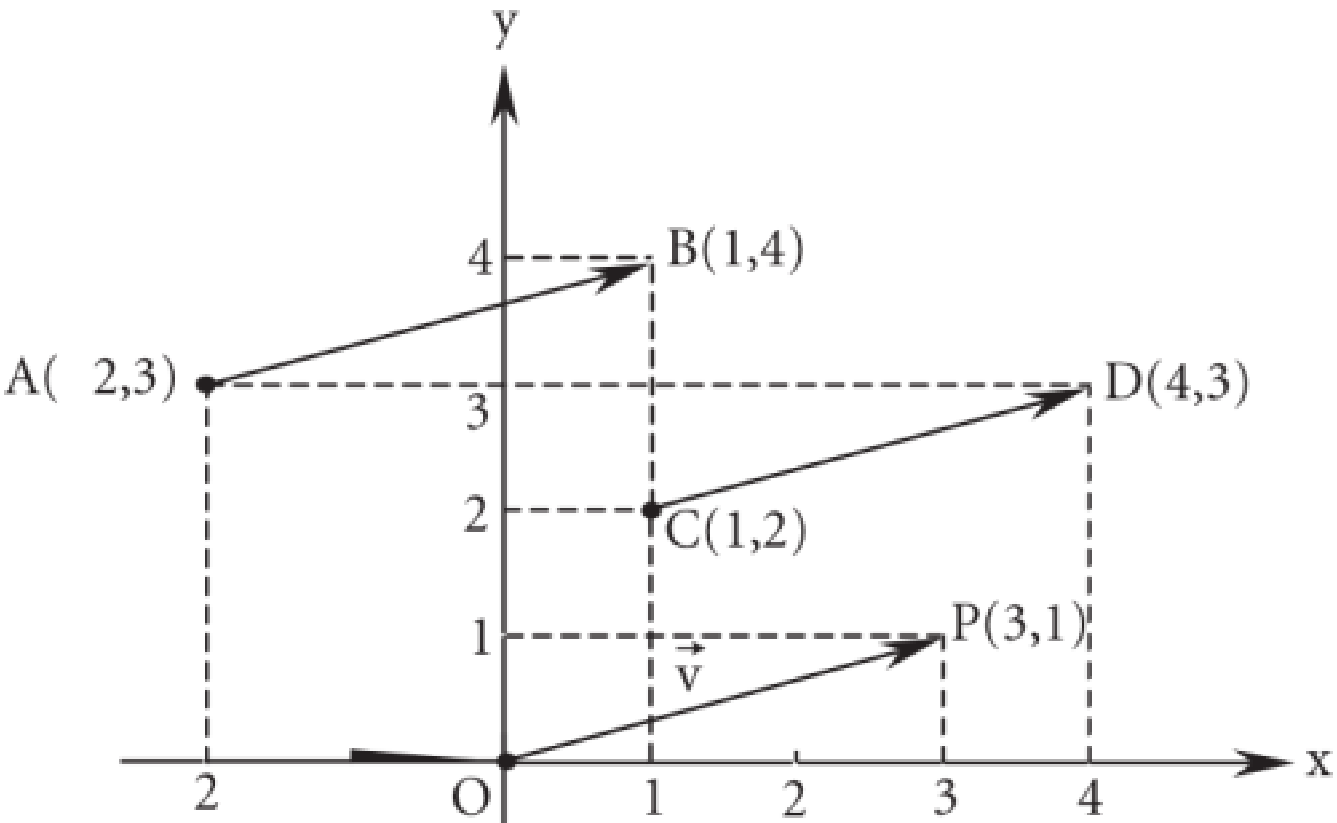
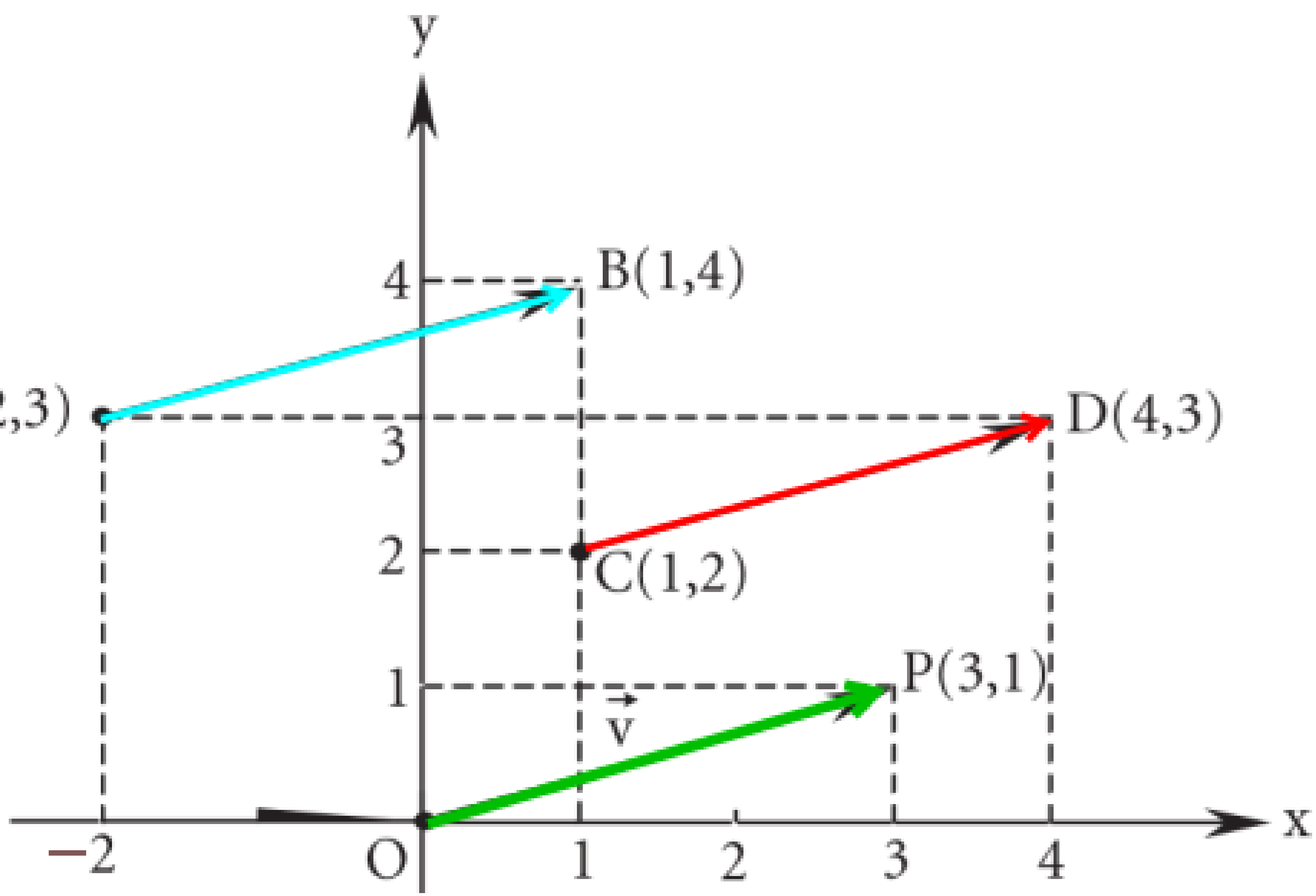


Figura 1.46

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \vec{v} = B - A$$

$$B = A + \vec{v} \text{ ou } B = A + \overrightarrow{AB}$$

o vetor $\vec{v}$ "transporta" o ponto inicial A para o ponto extremo B.

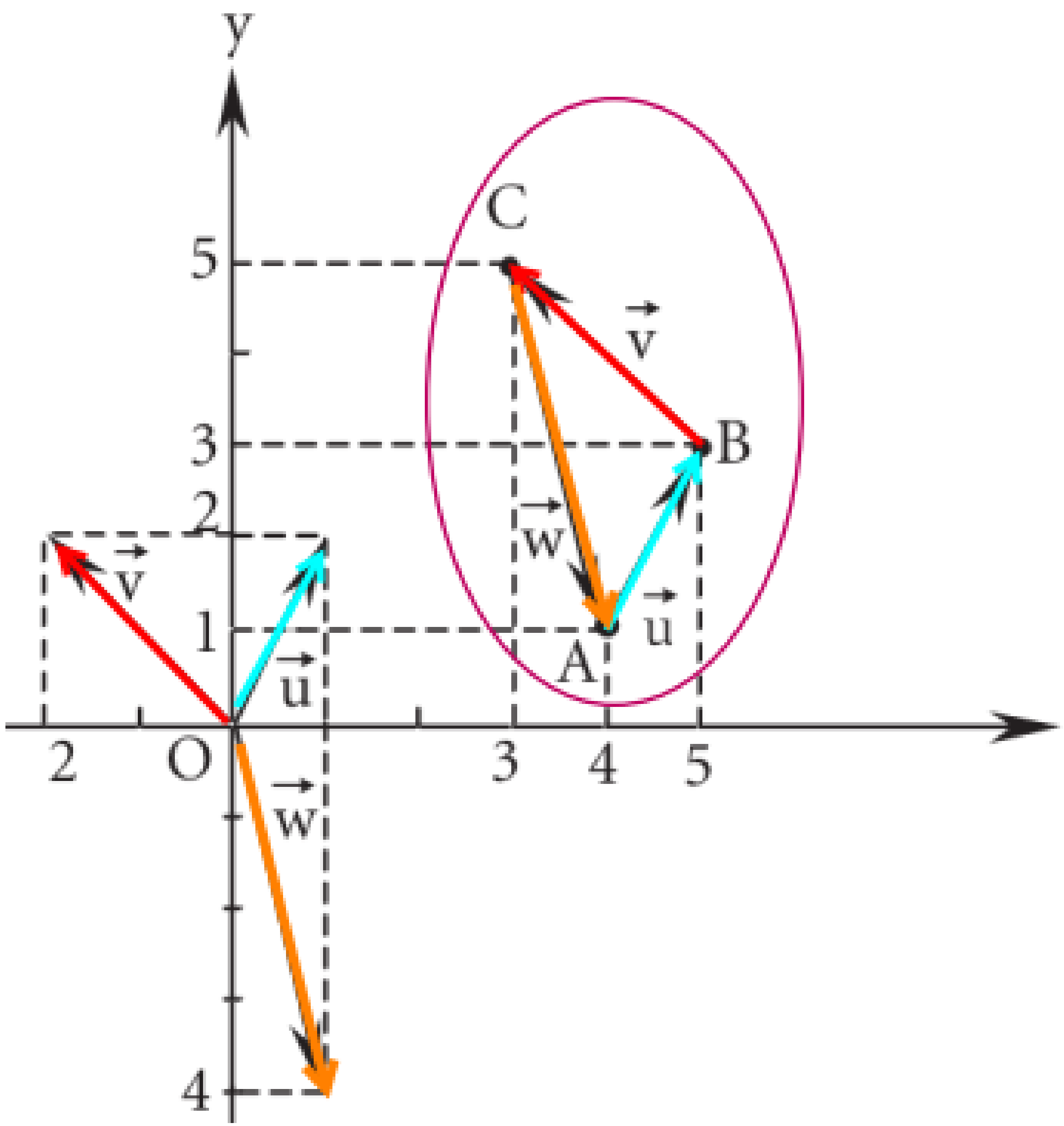


Retornando à Figura 1.46, na qual $\vec{v} = (3, 1)$, tem-se

$$B = A + \vec{v} = (-2, 3) + (3, 1) = (1, 4)$$

$$D = C + \vec{v} = (1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$$

$$P = O + \vec{v} = (0, 0) + (3, 1) = (3, 1)$$



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 2)$

$\vec{w} = \overrightarrow{CA} = A - C = (1, -4)$

Observamos ainda que

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} = (0, 0).$