Análise combinatória

A Análise combinatória é a parte da matemática trata das questões de contagem.

Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

_____ _____ _____ _____

Resolução:

Considerando as quatro letras: **a**, **n**, **e** e **l**, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$), ou seja, são 24 anagramas.

Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Salada	Prato quente	Sobremesa
2 possibilidades	3 possibilidades	3 possibilidades

Segue do PM que Total= 2.3.3= 18

Permutações simples e fatorial de um número

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

Fatorial

O valor obtido com P_n é também chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 1$.

Considera-se $0! = 1$.

Calcule quantos são os anagramas:

a) da palavra PERDÃO;

b) da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O;

c) da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);

d) da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos;

e) da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.

a) Basta calcular $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

b) P __ __ __ __ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular P_4:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) É como se a expressão ÃO fosse uma só letra: PERDÃO; assim, temos que calcular P_5:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) P __ __ __ __ O

O __ __ __ __ P

Temos então $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$; 48 anagramas.

e) Considerando PER como uma só letra, PERDÃO, temos que calcular P_4:

$P_4 = 4! = 24$

Como as 3 letras de PER podem aparecer em qualquer ordem, temos $P_3 = 3! = 6$ possibilidades de escrevê-las juntas.

Assim, o número total de anagramas pedido é:

$P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$; 144 anagramas

Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Resolução:

Nesse caso, há 3 três letras **A**, 2 letras **R** e um total de 5 letras. Então:

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}2!} = 10$$

Logo, são 10 os anagramas da palavra ARARA.

Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com **A**?

Resolução:

Fixamos uma letra **A** e fazemos os possíveis anagramas com as demais: $\text{A}\underbrace{\text{CAMARAD}}$

$$\frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Logo, 840 anagramas de CAMARADA começam com **A**.

Quantos números ímpares de 4 algarismos não repetidos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

Para que o número seja ímpar, devemos ter como algarismo das unidades uma das 5 opções apresentadas (1, 3, 5, 7 ou 9).

Para a dezena, temos 8 opções, pois não podemos repetir o algarismo usado nas unidades.

Para a centena, 7 opções; para o milhar, 6 opções.

Assim, $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 = 1680$; 1680 números.

Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

Resolução:

São 3 estados: Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Para pintar o Rio Grande do Sul há 5 possibilidades, para o Paraná há 4 possibilidades e para Santa Catarina há 3 possibilidades. Logo, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades.

Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leqslant n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane. Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}$, $\{A, R\}$, $\{A, F\}$, $\{A, G\}$, $\{E, R\}$, $\{E, F\}$, $\{E, G\}$, $\{R, F\}$, $\{R, G\}$, $\{F, G\}$.
A esses subconjuntos chamamos **combinações simples** de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos: $C_{5,2}$.
Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2} = 10$.

Observações:

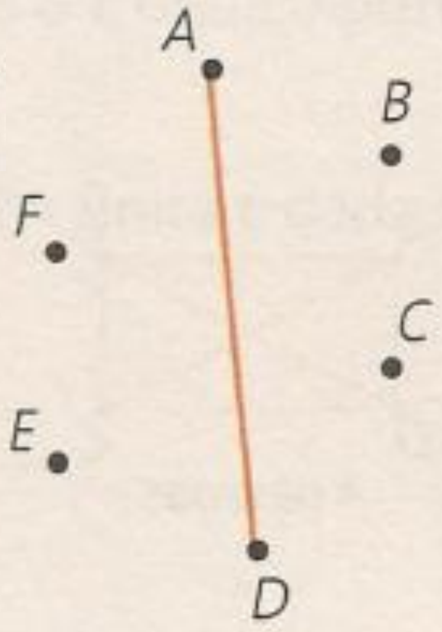
1ª) Como são subconjuntos de um conjunto, **a ordem dos elementos não importa**. Só consideramos subconjuntos distintos os que diferem pela natureza dos seus elementos.

Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão em linha reta.

a) Quantos segmentos de reta podemos traçar ligando-os 2 a 2?

Resolução:

a) Marcamos 6 pontos em um plano, onde não existem 3 alinhados.

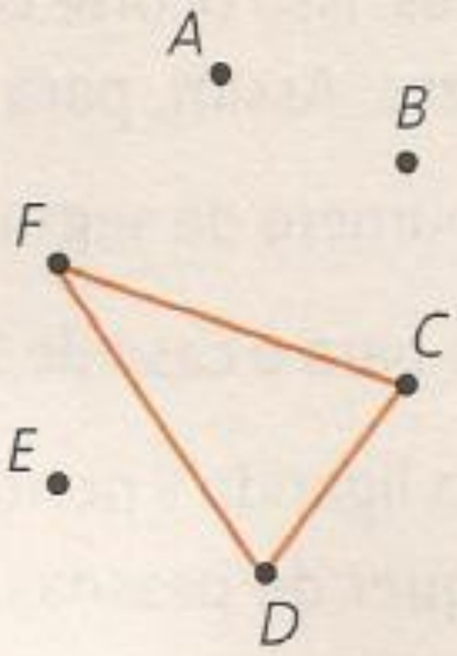


Como em cada segmento temos 2 extremos e, por exemplo, o segmento *AD* é o mesmo que o segmento *DA*, o número de segmentos é $C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Portanto, podemos traçar 15 segmentos de reta.

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 deles como vértices?

b) Como cada triângulo fica determinado por 3 pontos não colineares, temos, independentemente da ordem deles:



$$C_{6,3} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

Logo, podemos formar 20 triângulos.

De quantas maneiras podemos colocar 10 bolas em 3 urnas de modo que fiquem 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira?

1ª urna	2ª urna	3ª urna
2 bolas em 10	3 bolas em 8	5 bolas em 5

$$C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5} = \frac{10!}{2!8!}\cdot\frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!0!} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot \cancel{8}!}{{}_1\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{8}!}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5!}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{5}!}\cdot\frac{1!}{0!} = 45\cdot 56\cdot 1 = 2520$$

Portanto, existem 2520 possibilidades de fazer essa distribuição.

No jogo de truco, cada jogador recebe 3 cartas de um baralho de 40 cartas (são excluídas as cartas 8, 9 e 10). De quantas maneiras diferentes um jogador pode receber suas 3 cartas?

Resolução:

As 3 cartas diferem entre si pela natureza delas e não pela ordem. Como a ordem não importa, o problema fica resolvido calculando:

$$C_{40,\,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9\,880$$

Portanto, cada jogador pode receber suas 3 cartas de 9 880 maneiras diferentes.